அணிக் கொள்கையும், திட்டமான வேறுபாடுகளும்

(MATRIX THEORY AND FINITE DIFFERENCES)

வி. எஸ். சம்பத்குமார்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—749

அணிக்கொள்கையும் திட்டமான வேறுபாடுகளும்

ஆசிரியர்

வி. எஸ். சம்பத்குமார், எம்.எஸ்ஸி., பொருளாதாரம் (டிப்ளமா),
புள்ளியியல் துணைப் பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—June, 1977

Number of Copies—2,000

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 749

© Government of Tamilnadu

Matrix Theory and Finite Differences

V. S. SAMPATHKUMAR

Price Rs. 10-80

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

This book has been printed on concessional paper made available by the Government of India.

Printed by
HALE ACHAGAM,
14, Chellappa Mudali Street,
Madras - 600 012

பதிப்புரை

அணிக்கொள்கையும் திட்டமான வேறுபாடுகளும் என்ற இந் நூல், தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 749 ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 784 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந்நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக் கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்'தின் கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

மேலாண்மை இயக்குநர்
தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

பொருளடக்கம்

அணிக்கொள்கை

			பக்கம்
1.	அணியியற் கணிதத்திற்கு அறிமுகம்	...	1
2.	அணிக்கோவைகள்	...	43
3.	அணியின் மதிப்பிடம்	...	78
4.	நேரெதிர் அணி	...	103
5.	ஒருபடிச் சமன்பாடுகள்	...	126
6.	அணி உருவ மாற்றங்கள்	...	159
7.	அணியின் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு	...	185
8.	இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவைகள்	...	213

திட்டமான வேறுபாடுகள்

1.	வேறுபாடுகளும் செயலிகளும்	...	239
2.	சம இடைவெளிக்கு இடைச்செருகல்	...	261
3.	சார்புமாறியின் அசம இடைவெளிக்கு இடைச்செருகல்	...	280
4.	மைய வேறுபாட்டு இடைச்செருகல் சூத்திரங்கள்	...	301
5.	எதிர்மாற்ற இடைச்செருகலும் சமன்பாடுகளின் தீர்வும்	...	331
6.	எண்சார் வகையீடு	...	360
7.	எண்சார் தொகையீடு	...	381
8.	தொடர் கூட்டல்	...	434

பக்கம்

9. முதற்படி வேறுபாட்டுச் சமன்பாடுகள் ... 445

10. நிலையெண் கெழுவைப் பெற்ற நேர்க்கோட்டு வேறுபாட்டுச் சமன்பாடுகள் ... 456

விடைகள் ... 467

மேற்கோள் நூற்பட்டியல் ... 478

கலைச்சொற்கள் ... 481

குறியீடுகள்

(Symbols)

$> x$: x ஐ விட அதிகமாக (Greater than x).

$\geqslant x$: x ஐ விட அதிகமாக அல்லது சமமாக (Greater than or equal to x).

$< y$: y ஐ விடக் குறைவாக (Less than y).

$\leqslant y$: y ஐ விடக் குறைவாக அல்லது சமமாக (Less than or equal to y).

$\forall i$: ஒவ்வொரு i-க்கும் (For every i).

$\Longrightarrow$: உணர்த்துகிறது (Implies).

$\Longleftrightarrow$: தர்க்கரீதியாக (Logically equivalent to).

$\in A$; A-க்கு உரியதாகும் (Belongs to A).

அணிக்கொள்கை

(Matrix Theory)

1. அணியியற் கணிதத்திற்கு அறிமுகம்

(Introduction to Matrix Algebra)

1-A. வரையறைகள் (Definitions)

1. அணிகள் (Matrices) : $m\ n$ மூலகங்களை (elements) வரிசையாக m நிரைகளாக (rows) ஒவ்வொரு நிரையிலும் 'n' மூலகங்களைப் பெற்ற அமைப்பாக ஒரு நீண்ட சதுர வடிவில் அமைத்தால், அதற்கு அணி (Matrix) என்று பெயர்.

$m\ n$ மூலகங்களைக் கொண்ட ஓர் அணியைப் பொதுவாக,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots\cdots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

என்றவாறு அமைக்கிறோம். இந்த நீண்ட சதுர அமைப்பு m நிரைகளையும் (rows) n நிரல்களையும் (columns) பெற்று அமைகிறது. இதனை m-க்கு n அல்லது $m \times n$ என்ற தரத்தைப் (order) பெற்று அமையும் அணி என்று கூறுகிறோம். இதனை, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ என்றும் எழுதலாம். இதில், $i = 1, 2, \ldots m$; $j = 1, 2, \ldots n$. முதற்கீழ்க்குறியான் (First Subscript) i என்பது நிரையையும் இரண்டாம் கீழ்க்குறியான 'j' என்பது நிரலையும் குறிக்கிறது. உதாரணமாக, ஓர் அணியில் a_{32} என்பது, அவ் வணியின் மூன்றுவது நிரையிலும், இரண்டாவது நிரலிலும் அமைந்த ஒரு மூலகமாகும். $m = n$ எனில், அந்த அணியின் தரம் n ஆகும். மேலும் அந்த அணியைச் சதுர அணி என்று கூறுகிறோம். இப்பொழுது,

$$3x + 2y - 7 = 0$$
$$x - 6y + 4 = 0$$

என்ற ஒருபடிச் சமன்பாடுகளிலிருந்து (linear equations), x, y என்ற மாறிகளின் குணகங்களை (Coefficients) அவை அமைந்த வரிசையிலேயே 2-க்கு 2 என்ற தரத்தைப் பெற்ற அணியாகப் பின்வருமாறு அமைக்கின்றோம்.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

இதனைக் குணக அணி (Coefficient matrix) என்று கூறுகின்றோம். மேலுள்ள சமன்பாடுகளிலிருந்து x, y என்ற மாறிகளின் குணகங்களையும் நிலையெண் உறுப்புகளையும் (constant terms) அவை அமைந்த வரிசையிலேயே 2-க்கு 3 என்ற தரத்தைப் பெற்ற அணியாகக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைகிறது.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 1 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

இந்த அணியை மிகுதிப்படுத்திய அணி அல்லது விளிம்பு கூட்டிய அணி (augmented matrix) என்று கூறுகிறோம்.

குறிப்பு : ஓர் அணியை ( ), ‖ ‖ , [ ] என்ற ஏதாவதொரு குறியீடுமூலம் குறிக்கலாம். ஆனால், நாம் [ ] என்ற குறியீட்டை மட்டுமே முழுவதுமாகப் பயன்படுத்துவோம்.

2. சம அணிகள் (Equal matrices) : இரண்டு அணிகளும் ஓரே தரமுடையனவாக (Same order) அமைந்து, ஓர் அணியிலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் அதற்கொத்த மற்றோர் அணியின் முறையான ஒவ்வொரு மூலகமும் சமமாக இருந்தால், அந்த அணிகளைச் சம அணிகளென்று கூறுகின்றோம்.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad B = [b_{ij}]_{m \times n} \text{ என்க}$$
$$A = B \Longrightarrow a_{ij} = b_{ij} \ \forall \ i, j \in N$$

1-B. எண் களத்திற்குரிய அணி (Matrix over a number field)

A என்ற அணியின் எல்லா மூலகங்களும் F என்ற களத்திற்குரியனவானால், அவ் வணியை எண் களத்திற்குரிய அணி என்கிறோம். சிறப்பாக, ஓர் அணியின் எல்லா மூலகங்களும் மெய்யாக இருந்தால், அவ்வணியை மெய்யணி (Real Matrix) என்கிறோம்.

அணியின் மூலைவிட்ட மூலகங்கள் (Diagonal elements of a matrix)

ஓர் அணியின் தலையாய மூலைவிட்டம் (Principal Diagonal of a matrix): A என்ற ஏதோ ஓர் அணியின் 'a_{ij}' என்ற மூலகங்களுக்கு $i = j$ என்றிருந்தால், அந்த மூலகங்களை அவ் வணியின் மூலைவிட்ட மூலகங்களென்றும், அம் முறையில் மூலைவிட்ட அமைப்பில் அமைந்த நிலைக்குத் தலையாய மூலைவிட்டம் என்றும் பெயர்.

கவனிக்கவும் : அணி என்பது எண் அன்று. அதனால் அணிக்கு மதிப்புக் கிடையாது (No Value).

மாதிரி 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & -8 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

என்ற அணியில் 1, 4, 2 என்பவை மூலைவிட்ட மூலகங்களாகும். இந்த அமைப்பைத் தலையாய மூலைவிட்டம் என்கிறோம்.

1-C. கொடுக்கப்பட்ட அணியோடு தொடர்புகொள்ளும் அணிகள் (Matrices associated with a given matrix)

1. ஓர் அணியின் திருப்பு (Transpose of a matrix): கொடுக்கப்பட்ட ஓர் அணியின் நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றம் செய்து பெறப்பட்ட அணிக்குத் திருப்பு அணி என்று பெயர். இதனை A^T என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

அதாவது, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ எனில், $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$

அதாவது, A-ன் (i, j)ஆம் மூலகம், A^T-ன் (j, i)ஆம் மூலகமாகும். மேலும் A-ன் தரம் m-க்கு n எனில், A^T-ன் தரம் n-க்கு m ஆகும்.

மாதிரி 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3} \Longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

கவனிக்கவும் : $(A^T)^T = A$. அதாவது, A^T என்ற திருப்பு அணியின் திருப்பு அணி 'A' ஆகும்.

2. ஓர் அணியின் இணை (Conjugate of a matrix): a, b என்ற மெய் எண்களைக் கருதுக. பின்பு $x = a + ib$ என்பது சிக்கல் எண்ணாகும். $(a + ib)$, $(a - ib)$ என்ற சிக்கலெண்களை ஒன்றுக்கொன்று இணை (Conjugate) என்று கூறுகின்றோம். $x = a + ib$-ன் இணையை $\overline{x} = \overline{a + ib} = a - ib$ என்று எழுதுகிறோம். இப்பொழுது, $\overline{(\overline{x})} = \overline{a - ib} = a + ib$. அதாவது, இணைச் சிக்கலெண்ணின் இணையானது கொடுக்கப்பட்ட சிக்கலெண்ணேயாகும்.

$x_1 = a + ib$, $x_2 = c + id$ எனில்,

(i) $x_1 + x_2 = (a + c) + i(b + d)$

$$\therefore \overline{x_1+x_2} = \{\overline{(a+c)+i(b+d)}\} = (a+c)-i(b+d)$$
$$= (a-ib)+(c-id)$$
$$= \overline{x_1}+\overline{x_2}$$

அதாவது, இரு சிக்கலெண்களின் கூட்டலின் இணையானது தனித்தனி இணையின் கூட்டலாகும்.

(ii) $$x_1\, x_2 = (a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$$
$$\overline{x_1\, x_2} = \overline{\{(ac-bd)+i(ad+bc)\}}$$
$$= (ac-bd)-i(ad+bc)$$
$$= (a-ib)\,(c-id)$$
$$= \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}$$

அதாவது, இரு சிக்கலெண்களின் பெருக்கலின் இணையானது, தனித்தனி இணைகளின் பெருக்கலுக்குச் சமமாகும்.

A என்ற கொடுக்கப்பட்ட அணியின் மூலகங்கள் சிக்கலெண்களாயிருந்து, அச் சிக்கல் எண்களை அதன் இணைச் சிக்கல் எண்களாக மாற்றி அமைத்துப் பெறப்படும் அணிக்கு A-ன் இணை என்று பெயர். இதனை, $\overline{A}$ என்று குறிப்பிடுகின்றோம். இவ்வாறாக, $A=[a_{ij}]$ எனில், $\overline{A}=[\overline{a_{ij}}]$. இதில், $[\overline{a_{ij}}]$ என்பது, a_{ij}-ன் இணைச் சிக்கலாகும் (Conjugate Complex).

மாதிரி 3

$$A = \begin{bmatrix} 3+5i & 2+3i & 4+3i \\ 4-2i & 2+8i & 7-6i \\ 6 & 6+7i & 9 \end{bmatrix} \text{ எனில்,}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 3-5i & 2-3i & 4-3i \\ 4+2i & 5-8i & 7+6i \\ 6 & 6-7i & 9 \end{bmatrix}$$

கவனிக்கவும்: $\overline{(\overline{A})} = A$. அதாவது, இணை அணியின் இணை என்பது, A என்ற கொடுக்கப்பட்ட அணியாகும்.

3. இணைத் திருப்பு அணி (Conjugate transpose of a matrix): A என்ற கொடுக்கப்பட்ட அணியின் திருப்பத்தின் இணையை A-ன் இணைத் திருப்பு அணி என்று கூறுகின்றோம். இதனை, A* என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

மாதிரி 4

$$A = \begin{bmatrix} 3+5i & 2+3i & 4+3i \\ 4-2i & 5+8i & 7-6i \\ 6 & 6+7i & 9 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 3-5i & 2-3i & 4-3i \\ 4+2i & 5-8i & 7+6i \\ 6 & 6-7i & 9 \end{bmatrix}$$

$$(\overline{A})^T = \begin{bmatrix} 3-5i & 4+2i & 6 \\ 2-3i & 5-8i & 6-7i \\ 4-3i & 7+6i & 9 \end{bmatrix}$$

கவனிக்கவும் : $(\overline{A})^T = (\overline{A^T}) = A^*$

1-D. அணிகளின் சில சிறப்பு வகைகள் (Some special types of matrices)

1. சதுர அணிகள் (Square matrices): அணியின் பிரதி (Trace of a matrix) $m=n$ என்றிருக்கும்போது $m \times n$ என்ற தரத்தைப் பெற்ற அணியான A-ஐச் சதுர அணி என்று கூறுகிறோம். அதாவது, நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருக்கும்போது ஓர் அணி சதுர அணியாகிறது.

இவ்வாறாக, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ $\quad i = 1, 2 \ldots\ldots n$, $\quad j = 1, 2 \ldots\ldots n$

என்பது $n \times n$ என்ற தரத்தைப் பெற்ற சதுர அணியாகும்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ என்ற சதுர அணியில்

A-ன் $a_{11}, a_{22}, a_{33} \ldots a_{nn}$ என்ற மூலைவிட்ட மூலகங்களின் கூட்டலை A-ன் பிரதி (Trace of A) என்று கூறுகிறோம்.

அதாவது,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \text{பிரதி}\ (A)$$

மாதிரி 5

$$A = \begin{bmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & p \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

இஃது ஒரு சதுர அணியாகும். இதில் பிரதி (A) $= a + b + c + p$.

2. நிரை, நிரல் அணிகள் (Row and column matrices) : $[a_{11}\ a_{12} \ldots\ldots a_{1n}]_{1\times n}$ என்ற அணியை $1\times n$ என்ற தரத்தைப் பெற்ற நிரை அணி என்றும்,

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

என்ற அணியை $m\times 1$ என்ற தரத்தைப் பெற்ற நிரல் அணி என்றும் கூறுகிறோம்.

3. மூலைவிட்ட அணி (Diagonal matrix): $[a_{ij}]_{n\times n}$ என்ற ஒரு சதுர அணியில் மூலைவிட்ட மூலகங்களைத் தவிர, மற்ற மூலகங்கள் பூச்சியமாக இருந்தால், அந்த அணிக்கு மூலைவிட்ட அணி என்று பெயர். அதாவது, $a_{ij}=0$; $i\neq j$ என்றிருக்கும் போது, மூலைவிட்ட அணி என்று கூறுகிறோம்.

உதாரணமாக,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

இதனை மூலைவிட்ட அணி $[a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ldots\ a_{nn}]$ என்றும் எழுதலாம்.

4. மூலைவரை அணி (Scalar matrix) : ஒரு மூலைவிட்ட அணியின் எல்லா மூலகங்களும் சமமாயிருந்தால், அந்த அணியை மூலைவரை அணி என்கிறோம். அதாவது, ஒரு சதுர அணியில் மூலைவிட்ட மூலகங்கள் சமமாயிருந்து, மற்ற மூலகங்கள் பூச்சியமாயிருந்தால், அதனை மூலைவரை அணி என்கிறோம்.

உதாரணமாக,

$$A = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}_{5\times 5}$$

என்பது மூலைவரை அணியாகும்.

5. சமச்சீர் அணி (Symmetric matrix): ஓர் அணி சதுர அணியாகவும், $a_{ij} = a_{ji} \; \forall \; i, j$ என்றுமிருந்தால், அந்த அணியைச் சமச்சீர் அணி என்று கூறுகின்றோம். தெளிவாக A என்ற அணி, சமச்சீர் அணியாக இருந்தால், $A^T = A$.

6. எதிர்ச்சீர் அணி (Skew Symmetric matrix) : $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ என்ற சதுர அணியில் $a_{ij} = -a_{ji} \; \forall \; i, j$ என்றிருந்தால், அந்த அணியை எதிர்ச்சீர் அணி என்கிறோம்.

அதாவது, A என்ற எதிர்ச்சீர் அணி என்பது;

$$A = -A^T \text{ என்றவாறு அமைந்திருக்கும்.}$$

கவனிக்கவும் : $j = i$ என $a_{ij} = -a_{ji}$-ல் பிரதியிட்டால், $a_{ii} = -a_{ii}$ அல்லது $a_{ii} = 0$ என ஆகும். இதனால் எதிர்ச்சீர் அணியின் மூலைவிட்ட மூலகங்கள் பூச்சியம் என்பது தெளிவாகிறது.

மாதிரி 6 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ என்பது எதிர்ச்சீர் அணியாகும்.

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ என்பது சமச்சீர் அணியாகும்.

7. பூச்சிய அணி (Zero matrix): ஒரு சதுர அல்லது செவ்வக அணியில் எல்லா மூலகங்களும் பூச்சியமானால், அந்த அணியைப் பூச்சிய அணி என்கிறோம். இதனை 0 என்று குறிப்பிடுகின்றோம். உதாரணமாக, $0_{3 \times 3}$ என்ற பூச்சிய அணியை,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ என்று குறிப்பிடுகின்றோம்.}$$

8. அலகு அணி (Unit matrix) : ஒரு சதுர அணியில் மூலைவிட்ட மூலகங்கள் ஒருமையாகவும் (Unity), மற்ற மூலகங்கள் பூச்சியமாகவும் இருந்தால், அந்த அணியை அணி அலகு என்று கூறுகிறோம். அதாவது, $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ என்ற அணியில்,

$$a_{ij} = 1 \quad \forall \quad i = j,$$
$$= 0 \quad \forall \quad i \neq j \text{ என்றிருந்தால்,}$$

அந்த அணியை, அலகு அணி (Unit matrix) என்று குறிப்பிடு கிறோம். இதனை I_n என்கிறோம்.

9. கீழ் அணி (Sub-matrix): கொடுக்கப்பட்ட ஓர் அணியில் சில நிரைகளையோ அல்லது சில நிரல்களையோ அல்லது இரண் டையுமோ நீக்கக் கிடைக்கும் அணியைக் கீழ் அணி என்று கூறுகிறோம். A என்ற ஒரு சதுர அணியில், சில நிரைகளையும் சில நிரல்களையும் நீக்கியபின் கிடைக்கும் அணியில், A-ன் சில நீக்கப்படாத மூலைவிட்ட மூலகங்கள் இருப்பின், அந்த அணியைத் தலையாய கீழ் அணி (Principal sub-matrix) என்று கூறுகிறோம். ஓர் அணியில், சில கடைசி நிரைகளையும், அதே அளவான கடைசி நிரல்களையும் நீக்கக் கிடைக்கும் அணியைப் பிரதான கீழ் அணி (leading sub-matrix) என்று கூறுகிறோம்.

10. முக்கோண அணி (Triangular matrix): ஒரு சதுர அணியில் மூலைவிட்டத்திற்குக் கீழுள்ள எல்லா மூலகங்களும் பூச்சியமென்றால், அந்த அணியை மேல் முக்கோண அணி என்கிறோம்.

உதாரணமாக,

$$U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots\cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots\cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & u_{3n} \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

என்பது மேல் முக்கோண அணியாகும். இதில்,

$$u_{ij} = 0 \ \forall \ i > j.$$

11. அலகு மேல் முக்கோண அணி (Unit upper triangular matrix):

$$u_{ij} = 0 \ \forall i, >j \in N$$
$$u_{ij} = 1 \ \forall \ i = j \in N$$

என அமைந்த அணி அலகு மேல் முக்கோண அணியாகும்.

ஒரு சதுர அணியில் மூலைவிட்டத்திற்கு மேலுள்ள எல்லா மூலகங்களும் பூச்சியமென்றால், அந்த அணியைக் கீழ் முக்கோண அணி என்கிறோம்.

உதாரணமாக,

$$L=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & . & \cdots\cdots & l_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

என்பது கீழ் முக்கோண அணியாகும். இதில் $l_{ij} = 0 \ \forall \ i < j$.

12. அலகு கீழ் முக்கோண அணி (Unit lower triangular matrix):

$$l_{ij} = 0 \quad \forall \quad i < j$$
$$= 1 \quad \forall \quad i = j$$

என அமைந்த அணியானது கீழ் முக்கோண அணியாகும்.

13. ஹெர்மிஷியன் அணி (Hermitian matrix): $A = (a_{ij})$ என்ற ஒரு சதுர அணியில் $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ என்றிருந்தால், அதாவது $A = (\bar{A})^T$ எனில், அந்த அணி ஹெர்மிஷியன் அணி ஆகும். இதனை A^{Θ} என்று குறிப்பிடுகிறோம். தெளிவாக, A என்ற ஓர் அணி அதன் இணை திருப்பு அணியோடு (Conjugate matrix) சமமாக (Coincide) இருந்தால், அதாவது $A^{\Theta} = A$ எனில், அந்த அணி ஹெர்மிஷியன் அணியாகும். ஹெர்மிஷியன் அணியின் மூலவிட்ட மூலகங்கள் மெய்யெண்களாக அமைகின்றன.

மாதிரி 7

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2-4i & 3-4i \\ 2+4i & 0 & 4-2i \\ 3+4i & 4+2i & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2+4i & 3+4i \\ 2-4i & 0 & 4+2i \\ 3-4i & 4-2i & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{\Theta} = (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 1 & 2-4i & 3-4i \\ 2+4i & 0 & 4-2i \\ 3+4i & 4+2i & 2 \end{bmatrix} = A$$

$\therefore \; A^{\Theta} = A$

$$\text{மேலும் } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2+4i & 3+4i \\ 2-4i & 0 & 4+2i \\ 3-4i & 4-2i & 2 \end{bmatrix} = \bar{A}$$

$\therefore \; A^T = \bar{A}$

14. எதிர் ஹெர்மிஷியன் அணி (Skew Hermitianmartrix): $A = [a_{ij}]$ என்ற சதுர அணியில் $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$ எனில், அந்த அணியை எதிர் ஹெர்மிஷியன் அணி என்கிறோம். வரையறையின்படி $a_{ii} = -\bar{a}_{ii}$ அல்லது $a_{ii} + \bar{a}_{ii} = 0$ என்பதால், எதிர்

ஹெர்மிஷியன் அணியின் மூலைவிட்ட மூலகங்கள் பூச்சியமாகவோ அல்லது கற்பனை (imaginary) யாகவோ இருக்கும்.

மாதிரி 8

$$A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$$

என்ற இந்த அணியில் i, $3i$, 0 என்ற மூலைவிட்ட மூலகங்கள் பூச்சியமாகவும் கற்பனையாகவும் இருக்கின்றன. மேலும்,

$a_{12} = 1 - i$. எனவே, $-\bar{a}_{12} = -1 - i$.

$$a_{21} = -1-i.$$
$$a_{23} = i,$$
$$-\bar{a}_{23} = i = a_{32}$$
$$a_{13} = 2,$$
$$-\bar{a}_{13} = -2 = a_{31}$$

எனவே, A என்ற இந்த அணி எதிர் ஹெர்மிஷியன் அணியாகும். A என்ற அணி எதிர் ஹெர்மிஷியன் அணி என்றால், $A^{\Theta} = -A$ என்றிருக்கவேண்டும்.

15. வெக்டர் (Vector): n வகையளவுள்ள (n–tuple) எண்களின் (numbers) வரிசையை n-வெக்டர் என்கிறோம். $(n \times 1)$ என்ற நிரல் அணியை, நிரல் வெக்டர் எனவும் (Column vector), $(1 \times n)$ என்ற நிரை அணியை நிரை வெக்டர் (Row vector) என்றும் கூறுகிறோம்.

மெய்யெண்களின் களத்திற்கான வெக்டரை, மெய் வெக்டர் என்றும், சிக்கல் எண்களின் களத்திற்கான வெக்டரை, சிக்கல் வெக்டர் என்றும் கூறுகிறோம்.

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \forall j = 1, 2, \ldots\ldots n$$ என்பது நிரல் வெக்டர்களாகும்.

$[a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{in}]$ $\forall$ $i = 1, 2, \ldots$ m என்பது நிரை வெக்டர்களாகும்.

16. கட்டப்பட்ட அணி (Banded matrix): ஒரு சதுர அணியில் பூச்சியமற்ற மூலகங்கள் மட்டும் மூலைவிட்டமாக, கட்டாக அமையும். இவ்வாறாக, A என்ற சதுர அணியில்

(Square matrix) $a_{ij}=0 \; \forall \; |i-j|>K$ என இருந்தால், அந்த அணியைக் கட்டப்பட்ட அணி என்கிறோம். இந்த வகையில் ஒவ்வொரு நிரையிலும் $(2K+i)$ மூலகங்களும் பூச்சியமில்லாத மூலகங்களாகும்.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

என்ற சதுர அணி கட்டப்பட்ட அணியாகும். இதில் $a_{ij}=0 \; \forall \; |i-j| > 1$

1–E. அணி இயற்கணிதம் (Matrix Algebra)

இயற்கணித செய்கைகளை (algebraic operations) அணிகளின் மீது செயல்படுத்துவதால், புதிய அணிகளைப் பெறுகிறோம். முக்கியமான செய்கைகள் மூன்று வகைப்பட்டதாகும். அவையாவன:

(i) திசையிலியால் பெருக்கல் (Scalar multiplication).
(ii) அணிகளின் கூட்டல் (Addition of matrices).
(iii) அணிகளின் பெருக்கல் (Multiplication of matrices).

திசையிலியால் பெருக்கல் (Scalar Multiplication): $A=[a_{ij}]$ என்ற ஓர் அணியின் ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் λ என்ற திசையிலியால் (Scalar) பெருக்கிக் கிடைக்கும் அணியை λ என்ற திசையிலியால் பெருக்கப்பட்ட அணி என்கிறோம். இதனை λA அல்லது $A\lambda$ என்றும் குறிப்பிடலாம்.

அதாவது, $\lambda A=[\lambda a_{ij}]_{m\times n}$

மாதிரி 9

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

என்ற அணியை '3' என்ற திசையிலியால் பெருக்கினால்,

$$3A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 6 & 12 & 21 \\ 9 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

என்றாகும். அதாவது, A-ன் ஒவ்வொரு மூலகமும் 3ஆல் பெருக்கப்பட்டுக் கிடைக்கப்பெறும் அணியே 3A அணியாகும்.

இரு அணிகளின் கூட்டல் : ஒரே தரமுடைய (same order) இரு அணிகளின் முறையான மூலகங்களைக் கூட்டக் கிடைக்கும் அணியே, இரு அணிகளின் (ஒரே தரமுடையதாயமைந்த) கூட்டல் ஆகும்.

$$A = [a_{ij}]_{m\times n};\ B = [b_{ij}]_{m\times n}\ \forall\ i = 1, 2 \ldots\ldots m$$
$$\forall\ j = 1, 2 \ldots\ldots n$$

எனில், $A+B = [(a_{ij}+b_{ij})]_{m\times n}$ என்பது A, B என்ற ஒரே தரமுடைய இரு அணிகளின் கூட்டலாகும். $(m\times n)$ என்ற ஒரே தரமுடைய இரு அணிகளின் கூட்டலும், $(m\times n)$ என்ற தரத்தைப் பெற்றுள்ளமையால் $(m\times n)$ என்ற அணித்திரள்கள் (Set of all $m\times n$ matrices) கூட்டலுக்குட்பட்டபடி அடைத்த தாயுள்ளது (Closed under addition).

இரு அணிகளின் கழித்தல்: $m\times n$ தரத்தைப்பெற்ற B என்ற அணியை A என்ற $m\times n$ தரமுடைய அணியிலிருந்து கழிப்பது என்பது, -1 என்ற திசையிலியால் பெருக்கப்பட்ட அணியான Bஐ Aஉடன் கூட்டுதற்கொப்பாகும்.

$$A = [a_{ij}]_{m\times n},\ B = [b_{ij}]_{m\times n}\ \text{எனில்},$$
$$A - B = A + (-1)\,B = [a_{ij}]_{m\times n} + [-b_{ij}]_{m\times n}$$
$$= [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$$

மாதிரி 10

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix},\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\ \text{எனில்},$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-1 & 1-(-1) & -3-2 \\ -4-0 & 0-1 & 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

குறிப்பு : ஒரே தரமுடைய இரு அணிகள் கூட்டலுக்கும் கழித்தலுக்கும் அனுசரிப்பதாகக் (Conformable) கூறுகிறோம்.

அணிகளின் கூட்டல் விதிகள் (Laws of matrix addition)

அடைப்பு (Closure)

தேற்றம் : F என்ற களத்தில் (Field) A, B என்ற ஒரே தரமுடைய அணிகளைக் கருதினால், (A + B)-ம் அதே தரமுடைய தாய் F என்ற களத்தில் அமைகிறது.

நிரூபணம் : $A = [a_{ij}]_{m\times n},\quad B = [b_{ij}]_{m\times n}$

பிறகு, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$

மூலகங்களை உள்ளடக்கிய F என்ற களம் $[a_{ij}+b_{ij}]$ஐயும் உள்ளடக்கும் என்பதால், 'C' என்ற புதிய அணி F என்ற களத்தில் அமைந்துள்ளது என நிறுவுகிறோம்.

சேர்ப்பு விதி (Associative Law)

தேற்றம் : F என்ற களத்தில் A, B, C என்ற அணிகள் $m \times n$ என்ற தரத்தைப் பெற்று அமையட்டும். பிறகு, $(A+B)+C = A+(B+C)$.

நிரூபணம் : $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

$$C = [c_{ij}]_{m\times n}$$

இப்பொழுது, $(A+B) = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$

$$(A+B) + C = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{m\times n}$$

(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} என்பவை எண்களாதலால் கூட்டலுக்குச் சேர்ப்பு விதியைப் பின்பற்றுகிறது.)

$$= [a_{ij}]_{m\times n} + \{ [b_{ij}]_{m\times n} + [c_{ij}]_{m\times n}\}$$

$$= A + (B+C)$$

எனவே, $(A + B) + C = A + (B+C)$.

மாற்று விதி (Commutative law)

தேற்றம் : A, B என்ற இரு அணிகள் கூட்டலுக்கு அனுசரிப்பதாக (Conformable for addition) இருந்தால், $(A+B) = B+A$.

நிரூபணம் : $A = [a_{ij}]$, $B= [b_{ij}]$ என்ற இரு அணிகளும் $m\times n$ என்ற தரத்தைப் பெற்று அமையட்டும்.

பிறகு, $(A+B) = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}$

$$= [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

$$= [b_{ij} + a_{ij}]_{m\times n}$$

($\because$ சாதாரண எண்கள் மாற்று விதியைப் பின்பற்றுவதால்)

$$= [b_{ij}]_{m\times n} + [a_{ij}]_{m\times n}$$

$$= B + A$$

அணிகளின் கூட்டல் பங்கீட்டு விதியைத் (Distributive law) திசையிலி பெருக்கலுக்குப் பின்பற்றுகிறது.

தேற்றம் : $m \times n$ என்ற ஒரே தரமுடைய A, B என்ற இரு அணிகளையும், l என்ற அளவையும் கருதினால்,

$$l(A + B) = lA + lB$$

நிரூபணம் : $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ என்ற இரு அணிகளைக் கருதுக.

இப்பொழுது, $l\,(A + B) = l\,\{\,[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}\}$

$$= l\,[a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

(அணிகளின் கூட்டலினால்),

$$= [l\,a_{ij} + l\,b_{ij}]$$

(அளவையின் பெருக்கலினால்),

$$= [l\,a_{ij}] + [l\,b_{ij}]$$

$$= l\,[a_{ij}] + l[\,b_{ij}]$$

$$= l\,A + l\,B.$$

தேற்றம் : $A = B$ என்பது உண்மையானால்,

$$A + C = B + C$$

$$A + C = B + C \Longrightarrow A = B \text{ என்பது,}$$

கூட்டலுக்கான நீக்கவிதி (Cancellation Law for addition). ஒவ்வொரு வகையிலும் $a_{ij} + c_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ என்றிருந்தால் தான் $A + C = B + C$ என்பது உண்மையாகும். ஆனால், $a_{ij} = b_{ij}$ என்றிருந்தால்தான் $a_{ij} + c_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ என்பது உண்மையாகும்.

[சிக்கல் அரங்கத்தில் கூட்டலுக்கான நீக்க விதியின்படி (By the cancellation law of addition in the Complex domain)]

இதனால் $A + C = B + C \Longrightarrow A = B.$

அணியின் கூட்டலுக்குச் சர்வசமத்தின் (identity) நிலைப்பாடு (existence) : $m \times n$ என்ற தரத்தைப் பெற்ற A என்ற ஒவ்வோர் அணியையும் 0 என்ற பூச்சிய அணியையும் கருதினால், $A + 0 = 0 + A = A$ என்றாகும். இதில் 0 என்பது பூச்சிய அணி கூட்டலுச்குச் சர்வ சமமாகும் (identity).

நிரூபணம் : $A + 0 = [a_{ij} + 0] = [a_{ij}] = A$

$$0 + A = [0 + a_{ij}] = [a_{ij}] = A$$

எனவே, $A + 0 = 0 + A = A$

அணியின் கூட்டலுக்கு நேர் எதிர் அணியின் (inverse) நிலைப்பாடு: F என்ற களத்தில் A என்பது, $m \times n$ என்ற தரத்தைப் பெற்ற அணியாகவும், B என்பது, அதே களத்தில் A-ன் முறையான மூலகங்களுக்கு எதிர் மூலகங்களைப் பெற்று $m \times n$ தரமுடைய அணியாக இருந்தால், $A + B = B + A = 0$. இதில் '0' என்பது பூச்சிய அணியாகும். Bஐ A-ன் எதிர்க் கூட்டல் அணி என்கிறோம். இதனை $-A$ என்று குறிக்கிறோம். எனவே, A என்ற அணியின் கூட்டலுக்கான நேர் எதிர் அணி $-A$ ஆகும்.

மாதிரி : C என்பது, ஏதாவதொரு சிக்கல் எண் என்றும், A என்பது, ஏதாவதோர் அணி என்றும் கொண்டால், $(CA)^T = CA^T$.

நிரூபணம்: $A = [a_{ij}]$ என்றும் C என்பது, ஏதாவதொரு சிக்கல் எண் என்றும் கொள்க.

பிறகு, $cA = c\,[a_{ij}]_{m \times n} = [ca_{ij}]_{m \times n} = [d_{ij}]_{m \times n}$

இதில், $d_{ij} = ca_{ij}$

மேலும் $(cA)^T = [d_{ji}]_{n \times m}$

திரும்பவும், $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

பிறகு, $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$

$$cA^T = c\,[a_{ji}]_{n \times m} = [ca_{ji}]_{n \times m} = [ca_{ij}]_{m \times n}$$
$$= [d_{ij}]_{m \times n} = [a_{ji}]_{n \times m}$$

எனவே, $(cA)^T = cA^T$

மாதிரி : சிக்கல் களத்திலிருந்து கூட்டலுக்கு அனுசரிக்கும் A, B என்ற இரு அணிகளைக் கருதினால்,

$$\text{(i)}\ \overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\text{(ii)}\ \overline{cA} = \overline{c}\cdot\overline{A}$$

இதில் c என்பது சிக்கலெண்ணாகும்.

$$\text{(iii)}\ (cA)^{\Theta} = \overline{c}A^{\Theta}.$$

c என்பது சிக்கலெண்ணாகும்.

நிரூபணம் : (i) சிக்கல் மூலகங்களைக் கொண்ட $(n \times m)$ தரமுடைய A B அணிகளைக் கருதுக.

அதாவது, $A = [a_{ij}],\ B = [b_{ij}]$

$\bar{A} = [\bar{a}_{ij}],\ \bar{B} = [\bar{b}_{ij}]$

பிறகு $\bar{A} + \bar{B} = [\bar{a}_{ij}] + [\bar{b}_{ij}]$

இப்பொழுது,

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

$$\overline{A + B} = [\overline{a_{ij} + b_{ij}}] = [\bar{a}_{ij} + \bar{b}_{ij}]$$

எனவே, $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$ $(\because \overline{a + ib} = \bar{a} + \overline{ib} = a - ib)$

(ii) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ என்ற சிக்கல் அணியையும், c என்ற சிக்கல் எண்ணையும் கருதுக.

$$cA = [ca_{ij}]$$

மேலும், $\overline{(cA)} = [\overline{ca_{ij}}]$

$\bar{A} = [\bar{a}_{ij}],\ \bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$

பிறகு, $\bar{c}\,\bar{A} = [\bar{c}\,\bar{a}_{ij}] = [\overline{c\,a_{ij}}]$

(சிக்கலெண்களின் விதிகளின்படி)

எனவே, $\overline{c A} = \bar{c}\,\bar{A}$

(iii) $(cA)^{\Theta} = \{\overline{(cA)^{T}}\} = \{\overline{cA^{T}}\} = \bar{c}\,(\overline{A^{T}})$

$$= \bar{c} \cdot A^{\Theta}$$

மாதிரி : $m \times n$ தரத்தைப்பெற்ற A, B என்ற இரண்டு அணிகளைக் கருதினால்,

(i) $(A + B)^{T} = A^{T} + B^{T}$

(ii) $\{\overline{(A+B)^{T}}\} = \bar{A}^{T} + \bar{B}^{T}$ அல்லது $(A+B)^{\Theta} = A^{\Theta} + B^{\Theta}$

$$A = [a_{ij}]_{m \times n},\ B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

$$A^{T} = [a_{ji}]_{n \times m},\ B^{T} = [b_{ji}]_{n \times m}$$

(i) A^{T}, B^{T} ஆகியவை ஒரே தரத்தைப் பெற்றுள்ளமையால், இவை கூட்டலுக்கு அனுசரித்து இருக்கும்.

$$\therefore A^T + B^T = [a_{ji}]_{n\times m} + [b_{ji}]_{n\times m}$$
$$= [a_{ji} + b_{ji}]_{n\times m} \text{ (கூட்டல் விதிப்படி)} \quad (1)$$

மேலும்,

$$(A+B) = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} = [c_{ij}]_{m\times n}$$

இதில், $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$\therefore (A+B)^T = [c_{ji}]_{n\times m}$$
$$= [a_{ji} + b_{ji}]_{n\times m} \quad (2)$$

(1) (2) ஆகியவற்றிலிருந்து, $(A + B)^T = A^T + B^T$ என்றறிவோம்.

(ii) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ என்க.

பிறகு, $A + B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}$
$$= [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$
$$= [c_{ij}]_{m\times n}.$$

இதில், $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$\therefore (A+B)^T = [c_{ji}]_{n\times m}.$$
$$= [a_{ji} + b_{ji}]_{n\times m}$$

இப்பொழுது, $\overline{\{A+B\}}^T = \overline{[a_{ji} + b_{ji}]}_{n\times m}$
$$= [\overline{a_{ji}} + \overline{b_{ji}}]_{n\times m} \quad (3)$$

$$A^T\ [a_{ji}]_{n\times m},\ B^T = [b_{ji}]_{n\times m}$$
$$\overline{A}^T = [\overline{a}_{ji}]_{n\times m},\ \overline{B}^T = [\overline{b}_{ji}]_{n\times m}$$
$$\overline{A}^T + \overline{B}^T = [\overline{a}_{ji}]_{n\times m} + [\overline{b}_{ji}]_{n\times m}$$
$$= [a_{ji} + b_{ji}]_{n\times m} \quad (4)$$

(3), (4) இவற்றிலிருந்து, $\overline{(A+B)}^T = \overline{A}^T + \overline{B}^T = A^{\Theta} + B^{\Theta}$

மாதிரி : A என்பது, எதிர்ச்சீர் அணி என்றால், $A^T = -A$ என்பதை நிறுவுக.

நிரூபணம் : வேண்டிய நிபந்தனை (Necessary Condition)

$A = [a_{ij}]$ என்பது, n நிரைகளைக் கொண்ட எதிர்ச்சீர் அணி என்போம்.

பிறகு, $a_{ij} = -a_{ji}$ (1)

மேலும் $a_{ii} = 0$

இப்பொழுது, $A^T = [a_{ji}]$

பிறகு, A^T-ன் (j, i) ஆம் மூலகம்

$=$ A-ன் (ij) ஆம் மூலகம் ஆம்

$=$ A-ன் $-(ji)$ ஆம் மூலகம் ஆம் [(1)-ன்படி]

$= -$ { A-ன் (ji) ஆம் மூலகமாகும் }

எனவே, A^T, $(-A)$ என்ற அணிகள் ஒப்பிடுவதற்குரியது என்பதால், $A^T = -A$

போதுமான நிபந்தனை (Sufficient Condition): $A^T = -A$ எனில்,

$$A^T + A = 0$$

$$A = [a_{ij}] \text{ எனில் } A^T = [a_{ji}]$$

$$\therefore A + A^T = [a_{ij} + a_{ji}] = 0$$

$a_{ij} = -a_{ji}$, $a_{ii} = 0$ எனில், தெளிவாக, $a_{ij} + a_{ji} = 0 \; \forall i, j$ மேலும், நிரைகளின் எண்ணிக்கை, நிரைகளின் எண்ணிக்கையாக இருத்தல் அவசியம் என்பதால், A என்பது எதிர்ச்சீர் அணியாகும் என்பது புலனாகும்.

I-F அணிகளின் பெருக்கல் (Multiplication of Matrices)

$m \times p$ என்ற தரத்தைப் பெற்ற A என்ற அணியையும், $p \times n$ என்ற தரத்தைப் பெற்ற B என்ற அணியையும் கருதினால், AB என்ற பெருக்கல், $m \times n$ என்ற தரத்தைப் பெற்ற அணியாகும்.

A-ன் i ஆம் நிரையின் மூலகங்களையும், அதற்கேற்ப, B-ன் j ஆம் நிரலின் மூலகங்களையும் முறையே பெருக்கி, பின்பு அவற்றைக் கூட்டிக் கிடைக்கும் எண்ணே, AB-ன் i ஆம் நிரை, j ஆம் நிரலின் மூலகமாகும்.

குறியீடு மூலமாக,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}_{m\times p} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & & \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}_{p\times n}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

இதில், $c_{ij}=a_{i1}, b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j} \cdots + a_{ip}\cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^{P} a_{ik}\cdot b_{kj}$

குறிப்பு: (i) AB என்ற பெருக்கலின் Bஐ A ஆல் முன் பெருக்கல் செய்தல் (pre-multiplication) என்றும், Aஐ Bஆல் பின்பெருக்கல் செய்தல் (post-multiplication) என்றும் பெயர்.

(ii) A என்ற அணியின் நிரல்களின் எண்ணிகையும், B என்ற அணியின் நிரலின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருந்தால், A என்ற அணி, B என்ற அணியுடன் பெருக்கலுக்கு அனுசரிக்கின்றது (Conformable for multiplication) என்கிறோம்.

(iii) AB உம், BAஉம் தனித்தன்மைகள் பெற்றுள்ளன. சில சமயங்களில் A என்ற அணி, Bக்குப் பெருக்கலுக்கு அனுசரித்தும், B என்ற அணி, Aககுப் பெருக்கலுக்கு அனுசரிக்காமலும் இருக்கலாம். அதாவது, A என்ற அணி $m\times p$ தரத்தைப் பெற்றும், B என்ற அணி $p\times n$ என்ற தரத்தைப் பெற்றும் இருந்தால், A என்ற அணி Bக்குப் பெருக்கலுக்கு அனுசரிக்கும். ஆனால், B என்ற அணி A க்குப் பெருக்கலுக்கு அனுசரிக்கவில்லை. மேலும், $m=n$ என்றிருந்தாலும், எப்பொழுதும் AB $\neq$ BA என்றிருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

மாதிரி :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}, \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} \{1\cdot1+(-1)(0)+2\cdot1\} & \{1,2+(-1)(-1)+2\cdot2\} \quad \{1\cdot0+(-1)(1)+(2)(-1)\} \\ \{3\cdot1+0.0+1\cdot1\} & \{3\cdot2+(0)\cdot(-1)+1\cdot2\} \quad \{3\cdot0+0\cdot1+(1)(-1)\} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

மாதிரி :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$ எனில்,

பெருக்கலுக்கான பரிமாற்று விதியை A-ம் B-ம் பின்பற்று கின்றனவா என்று காண்க.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

இங்கு, $AB \neq BA$, எனவே, A-ம் B-ம் பரிமாற்று விதியைப் பின்பற்றவில்லை.

மாதிரி :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$ எனில்,

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

A, B என்ற கொடுக்கப்பட்ட அணிகள் சதுர அணிகளாயிருந்தும் இங்கு $AB \neq BA$.

குறிப்பு (iv) : எண்ணியியற் கணிதத்தில் $xy = 0$ எனில், $x = 0$ அல்லது y அல்லது $x = 0 = y$ என்றாகிறது. ஆனால், அணிக்கொள்கையில் $A = [a_{ij}]$ என்ற அணியையும், $B = [b_{ij}]$ என்ற அணியையும் பெருக்கி, $AB = 0$ எனில், $A \neq 0$, $B \neq 0$. அதாவது, A அல்லது B என்ற அணி பூச்சிய அணியாகமாட்டா. இங்கு, A,B ஆகிய அணிகளைப் பூச்சியத்தின் வகுக்கும் எண் (Divisors of Zero) என்று கூறுகிறோம்.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

கொடுக்கப்பட்ட இரு அணிகள் பூச்சிய அணிகளல்ல. ஆனால் அவற்றின் பெருக்கல் பூச்சிய அணியாகிறது.

குறிப்பு (v) : அணிக்கொள்கையில் $AB = AC \not\Rightarrow B = C$ ($A \neq 0$ என்றிருப்பினும்). சாதாரணமாக, $A \neq 0$ என்றிருந்தாலும் $AB = AC$-லிருந்து Aயை நீக்குவது இல்லை.

குறிப்பு (vi) : A, B ஆகிய இரு அணிகள் சதுரமாகவும், ஒரே தரத்தைப் (order) பெற்றுமிருந்தால்,

(1) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

(2) $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$

(3) $(A-B)^2 + A^2 - AB - BA + B^2$

(4) $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$. என்றிருக்கும்.

20 பூச்சிய அடுக்கு அணி (Nil potent matrix)

ஒரு சதுர அணியின் (பூச்சிய அணியைத் தவிர) அடுக்குகள் பூச்சிய அணியானால் அதனைப் பூச்சிய அடுக்கு அணி (Nil potent

matrix) என்கிறோம். அதாவது, P என்பது நேர் முழு எண் (Positive integer) எனில், A என்ற சதுர அணிக்கு $A^P = 0$ என்றிருந்தால், A ஐப் பூச்சிய அடுக்கு அணி என்கிறோம்.

உதாரணமாக,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ எனில், } A = A.A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

மேலும், $A^3 = A^2 . A = 0 . A = 0$

மற்றோர் உதாரணமாக,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ என்பது பூச்சிய அடுக்கு அணியாகும்.}$$

இங்கு $B^2 = B. B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

மாதிரி : I என்பது, (2×2) தரத்தைப் பெற்ற அலகு அணி (Unit matrix) எனில், $X^2 - 4X + 3I = 0$ என்றிருக்கும்படியான எல்லா (2×2) தரத்தைப் பெற்றுள்ள X அணிகளைக் காண்க.

$$X^2 - 4X + 3I \Longleftrightarrow (X-2I)^2 = I$$

$$X - 2I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ எனில்,}$$

$$(X-2)^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

$$a^2 + bc = 1 = bc + d^2,\ b(a+d) = 0 = c(a+d)$$

$a+d = 0$ எனில், பிறகு $bc = 1 - a^2$

மேலும், $a = \lambda$, $b = \mu(1-\lambda)$, $c = \mu^{-1}(1+\lambda)$, $d = -\lambda$

[ஏதோ ஒரு λ-க்கும், ஏதோ ஒரு $\mu \neq 0$-க்கும்]

$a+d \neq 0$, $b = c = 0$, $a^2 = d^2 = 1$ எனில்,

$a = 1, b = 0, c = 0, d = 1$, அல்லது $a = -1, b = 0, c = 0, d = -1$

எனவே,

$$X = \begin{bmatrix} 2+\lambda & \mu(1-\lambda) \\ \mu^{-1}(1+\lambda) & 2-\lambda \end{bmatrix} \text{ அல்லது } \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ அல்லது } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

குறிப்பு (vii) :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p & q \\ v & s \end{bmatrix} \text{ ஆகிய அணிகள்}$$

மாற்று விதியை, $b = 0$ என்றிருந்தாலும், $p = s$, $q = v$, $b \neq 0$ என்றிருந்தாலும் பின்பற்றுகிறது.

இரு அணிகளைப் பெருக்கிய பின்பு கிடைக்கும் முடிவைச் சரி பார்த்தல்

இரு அணிகளைப் பெருக்கிய பின்பு கிடைக்கும் முடிவு சரிதானா என்பதைச் சரிபார்க்க கீழ்க்காணும் உதாரணத்தைக் காண்போம்.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 0 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 6 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 0 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 6 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & 48 \\ 88 & 88 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}$$

நிரல்களின் கூட்டல் } 13 6 15 2 9 நிரல்களின் கூட்டல் } 181 150

பெருக்கி வந்த விடையைச் சரிபார்த்தல்

$$13\times1+6\times3+15\times5+2\times6+9\times7 = 181$$
$$13\times2+6\times4+15\times6+2\times5+9\times0 = 150$$

என்பதால், கொடுக்கப்பட்ட A, B என்ற இரு அணிகளின் பெருக்கலான AB என்ற அணி சரியானது என்று தெளிவாகிறது.

தேற்றம் : அணிகளின் பெருக்கல் சேர்ப்பு விதியைப் பின் பற்றுகிறது.

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}$$
$$B = [b_{jk}]_{n\times p}$$
$$C = [c_{lr}]_{p\times q}$$

எனில், (AB)C = A(BC)

பெருக்கலின் வரையறையைப் பின்பற்றினால்,

$$AB = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}\right]_{m\times p}$$

இங்குள்ள $i = 1,2 \ldots m$. இது மூலகத்தின் நிரையைக் குறிக்கிறது. $k=1, 2 \ldots p$. இது மூலகத்தின் நிரலைக் குறிக்கிறது.

$$\text{இப்பொழுது, } (AB)\,C = \left[\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ji}\right) c_{lr}\right]_{m\times q}$$

ஒவ்வொரு கூட்டலிலும், C_{lr} என்ற காரணிப் பகுப்பால் பெருக்கினால்,

$$(AB)C = \left[\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}\, c_{lr}\right)\right]_{m\times q}$$

இதில் நிரையின் கீழ்க்குறி $i = 1,2 \ldots m$

நிரலின் கீழ்க்குறி $r = 1,2 \ldots q$

$$\text{இதே முறையில் } A(BC) = \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ij}\cdot b_{j\cdot}, c_{kr}\right)\right]_{m\times q}$$

என்பதைக் காணலாம்.

திட்டமான கூட்டலில் (finite sum) கூட்டலின் வரிசை யாதா மொரு (arbitrary) என்பதால்,

$$\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}\cdot c_{kr}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ij}\cdot b_{jk}\cdot c_{kr}\right)$$

என்பது, i, r ஆகிய ஒவ்வொரு கோடி மதிப்புகளுக்கும் $(AB)C = A(BC)$.

தேற்றம் : அணிகளின் பெருக்கல் பங்கீட்டு விதியைப் (Distributive Law) பின்பற்றுகிறது.

$A = [a_{ik}]_{m\times n}$, $B = [b_{kj}]_{n\times p}$ $C = [c_{kj}]_{n\times p}$ என்க இங்கு, A என்ற அணி B-க்குப் பெருக்கலுக்காக அனுசரிக்கிறது. B ஆனது, C-க்குப் பெருக்கலுக்காக அனுசரிக்கிறது. மேலேயுள்ள தேற்றம் $A(B+C) = AB+AC$ என்றுரைக்கின்றது.

இப்பொழுது,

$$A(B+C) = [a_{ik}]_{m\times n}\ [(b_{kj}+c_{kj})]_{n\times p}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(b_{kj}+c_{kj})\right]_{m\times p}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot c_{kj}\right]_{m\times p}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{kj}\right]_{m\times p} + \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,c_{kj}\right]_{m\times p}$$

$$= AB + AC$$

குறிப்பு : பெருக்கலின் அனுசரிப்பு இருப்பதாகக் கருதினுல் $A(B+C) \neq (B+C)A$. ஏனெனில், அணிகள் பொதுவாகப் பரிமாற்று விதியைப் பின்பற்றுவதில்லை.

அணிகளின் பெருக்கலுக்கு இணை : (Conjugate of matrix product)

தேற்றம் : *$m\times n$ என்ற தரத்தைப்பெற்ற A என்ற அணியையும்,*

$n\times p$ என்ற தரத்தைப்பெற்ற B என்ற அணியையும்

கருதினல் $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$.

நிரூபணம் : $A = [a_{ij}]_{m\times n}$; $B = [b_{jk}]_{n\times p}$

$\therefore \overline{A} = [\overline{a}_{ij}]_{m\times n}$; $\overline{B} = [\overline{b}_{jk}]_{n\times p}$

பிறகு, $\overline{A}\,\overline{B} = \overline{c}$ —(1) இதில் $\overline{c} = [\overline{c}_{ik}]_{m\times p}$

$$\overline{c}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}\ \overline{b}_{jk} \qquad (2)$$

இப்பொழுது, $AB = D$. இதில், $D = [d_{ik}]_{m\times p}$; $d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$.

$$\text{பிறகு } \overline{AB} = \overline{D} \qquad (3)$$

$$\text{இதில், } \overline{D} = [\overline{d}_{ik}]_{m\times p},\ \overline{d}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}\ \overline{b}_{jk} \qquad (4)$$

(2), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து, $\overline{c}_{ik} = \overline{d}_{ik}$ i.e., $\overline{c} = \overline{D}$

$\therefore$ (1), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து, $\overline{AB} = \overline{A}\cdot\overline{B}$

குறிப்பு : $AB = BA$ எனில், A-ம், B-ம் எதிர்ப்பரிமாற்றம் (ant-commutative) செய்துகொள்வதாகக் கூறுகிறோம்.

உதாரணமாக,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0 \end{bmatrix}$$

இப்பொழுது,

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -BA$$

மாதிரி :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -7 & 6 & 2 \\ -6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$ எனில்,

$$(AB)\ C = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 6 & 2 \\ -6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 80 & -80 & 40 \\ 80 & 80 & -40 \\ 40 & -40 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 6 & 2 \\ -6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 320 \\ 0 & 0 & -320 \\ 0 & 0 & 160 \end{bmatrix}$$

தேற்றம் : முறையே $m \times n$, $n \times p$ என்ற தரங்களைப் பெற்ற அணிகள் A, B எனில்,

(i) $(AB)^T = B^T A^T$ என்கிறோம்.

(ii) $(AB)^{\Theta} = B^{\Theta} A^{\Theta}$.

நிரூபணம் :

(i) $A = [a_{ji}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$

$A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$

$B^T = [b_{kj}]_{p \times n}$

தெளிவாக, A, B ஆகியன பெருக்கலுக்கு அனுசரிக்கின்றன என்று தெரிகிறது.

$$A\ B = [a_{ij}]_{m \times n} [b_{jk}]_{n \times p} = [c_{ik}]_{m \times p}$$

இதில்,

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

$$\therefore (AB)^T = [c_{ki}]_{p \times m}$$

மேலும் B^T, A^T ஆகியனவும் பெருக்கலுக்கு அனுசரிப்பதால்,

$$B^T, A^T \; [b_{kj}]_{p \times n} [a_{ji}]_{n \times m} = [d_{li}]_{p \times m}$$

இதில், $$d_{li} \; \sum_{j=1}^{n} b_{kj} a_{ji}$$

$$\therefore \; B^T A^T = [c_{li}]_{p \times m} = (AB)^T$$

[ஏனெனில், $d_{li} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} \, a_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = c_{ik} = c_{ki}$]

(ii) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$

$$(AB)^{\ominus} = \{ \overline{(AB)^T} \} = \{ \overline{B^T A^T} \} \; [(ii) \text{ ன்படி}]$$
$$= (\overline{B^T}) (\overline{A^T})$$
$$= B^{\ominus} A^{\ominus}$$

தேற்றம் : AB என்ற சமச்சீர் அணிகள் (symmetric matrices) பெருக்கலுக்கு அனுசரித்தால், AB என்ற அணி சமச்சீருடையதாயிருக்கும்.

நிரூபணம் : $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ என்பவை ஒரே தரமுடைய சமச்சீர் அணிகளாகட்டும். பிறகு $A = A^T$, $B = B^T$

இப்பொழுது, $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$

எனவே, AB சமச்சீருடைய அணியாகும்.

தேற்றம் : A,B என்ற அணிகள் ஹெர்மிஷன் எனில், $AB + BA$ என்பது, ஹெர்மிஷனாகவும், $AB - BA$ என்பது, எதிர் ஹெர்மிஷனாகவும் இருக்கும்.

நிரூபணம் : A,B என்ற அணிகள் ஒரே தரமுடைய ஹெர்மிஷன் அணிகளாகட்டும்.

பிறகு, $A = A^{\ominus}$, $B = B^{\ominus}$ (ஹெர்மிஷன் என்பதால்)

இப்பொழுது $(AB + BA)^{\ominus} = (AB)^{\ominus} + (BA^{\ominus})$ (முன்பே நிறுவியுள்ளோம்).

$= B^{\ominus} A^{\ominus} + A^{\ominus} B^{\ominus}$ (தேற்றப்படி)
$= BA + AB = AB + BA$
(கூட்டலின் மாற்றுவிதிப்படி)

எனவே, $AB + BA$ என்பது, ஹெர்மிஷன் அணியாகும்.

இப்பொழுது, $(AB - BA)^{\ominus} = (AB)^{\ominus} — (BA)^{\ominus}$
$B^{\ominus}A^{\ominus} — A^{\ominus}B^{\ominus}$
(தேற்றப்படி)
$= BA - AB = -(AB - BA)$

எனவே, $(BA - AB)$ எதிர் ஹெர்மிஷனாகும்.

தேற்றம் : A என்பது சதுர அணியானால், AA^T-ம், A^TA-ம் சமச்சீருடையதாகும்.

நிரூபணம் : $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ என்க.

பிறகு, $(AA^T)^T = (A^T)^T. A^T = AA^T \; [\because (A^T)^T = A]$

எனவே, AA^T சமச்சீருடையதாக உள்ளது.

தேற்றம் : A என்பது ஒரு சதுர அணியானால், $AA^{\ominus}$-ம், $A^{\ominus}A$-ம் ஹெர்மிஷன் அணிகளாகும்.

நிரூபணம் : A என்பது சதுர அணியாதலால்,

$= (AA^{\ominus})^{\ominus} = (A^{\ominus}).^{\ominus}A^{\ominus}$
$= A.A^{\ominus}$

எனவே, $AA^{\ominus}$ என்ற அணி ஹெர்மிஷன் அணியாகும்.

இதேபோல், $(A^{\ominus}A)^{\ominus} = A^{\ominus} (A^{\ominus})^{\ominus}$ (தேற்றப்படி)
$= A^{\ominus}. A$

எனவே, $A^{\ominus}A$-ம் ஹெர்மிஷன் அணியாகும்.

தேற்றம் : A என்ற அணி சமச்சீருடையதெனில் (எதிர்ச்சீர் உடையதெனில்), B^TAB என்ற அணி சமச்சீருடையதாக (எதிர் சீருடையதாக) இருக்கும்.

நிரூபணம் : வகை 1 : A என்பது, சமச்சீர் அணி என்பதால்,

$$A^T = A$$

இப்பொழுது, $(B^T AB)^T = (AB)^T . (B^T)^T$ (தேற்றப்படி)

$$= B^T A^T (B^T)^T$$
$$= B^T AB \; (\because (B^T)^T = B)$$

எனவே, $B^T AB$ சமச்சீருடையதாகும்.

வகை 2 : A என்பது எதிர்ச்சீர் அணி என்பதால்,

$$A^T = -A$$

இப்பொழுது, $(B^T AB)^T = (AB)^T (B^T)^T$ (தேற்றப்படி)

$$= B^T A^T B$$
$$= - B^T AB$$

எனவே $B^T AB$ எதிர்ச்சீர் அணியாகும்.

தேற்றம் : ஒரு சமச்சீர் அணியின் நேர் முழுஎண் அடுக்குகள் (positive integral powers) சமச்சீருடையதாயிருக்கும்.

நிரூபணம் : A என்பது, $n \times m$ தரமுடைய சமச்சீர் அணி என்க.

எனவே, $A^T = A$

மேலும், $A^m = A . A . A \ldots m$ தடவைகள்.

இப்பொழுது, $(A^m)^T = (A.A\ldots A)^T = A^T . A^T \ldots m$ தடவைகள்

$$= A^m$$

எனவே, A^m சமச்சீருடைய அணியாகும்

பாகுபடுத்திய அணிகள் : கொடுக்கப்பட்ட அணிகளை எளிதாகக் கூட்டவோ, அல்லது பெருக்கவோ, அவற்றைக் கீழ் அணிகளாக நிரைக்கு இணையாக (parallel) அல்லது நிரலுக்கு இணையாகக் கோடுகள்மூலம் பாகுபடுத்துகிறோம்.

உதாரணமாக, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற மூல அணியை

$$A=\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ \hdashline 3 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$ என்று பாகுபடுத்துகிறோம்.

இதனை

$$A = \left[\begin{array}{c:c} P & Q \\ \hdashline R & S \end{array}\right]$$ என்றும் எழுதலாம்.

இதில் $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ என்பவை கீழ் அணிகளாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட அணியை எவ்விதமாகவும் பாகுபடுத்தலாம்.

கூட்டலுக்காகப் பாகுபடுத்தல்

ஒரே தரமுடைய A,B என்ற அணிகளைக் கூட்டவேண்டுமெனில், இரு அணிகளையும் ஒரே மாதிரித் துணை அணிகளாகப் பாகுபடுத்தவேண்டும். இதற்குச் சர்வசமப் பாகுபாடு (identical partition) என்று பெயர்.

உதாரணமாக,

$$A=\left[\begin{array}{c:cc} 5 & 4 & 3 \\ \hdashline 4 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 8 \\ \hdashline 2 & 3 & 1 \end{array}\right]_{4\times 3} \quad B = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 2 & 3 \\ \hdashline 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ \hdashline 6 & 7 & 8 \end{array}\right]_{4\times 3}$$

இதனை $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2}$ $\quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2}$

என்று எழுதிக் கூட்டினால்,

$$A+B = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \\ A_{31}+B_{31} & A_{32}+B_{32} \end{bmatrix}$$

இதில், $A_{11}=[5]_{1\times1}$ $A_{12}=[4\ 3]_{1\times2}$ $A_{21}=\begin{bmatrix}4\\9\end{bmatrix}_{2\times1}$

$$A_{22}=\begin{bmatrix}3 & 5\\7 & 8\end{bmatrix}_{2\times2},\quad A_{31}=[2]_{1\times1},\ A_{32}=[3\ 1]_{1\times2}$$

$$B_{11}=[1]_{1\times1}\quad B_{12}=[2\ 3]_{1\times2},\quad B_{21}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}_{2\times1}$$

$$B_{22}=\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & 4\end{bmatrix}_{2\times2}\quad B_{31}=[6]_{1\times1},\ B_{32}=[7\ 8]_{1\times2}.$$

எனவே,

$$A+B=\begin{bmatrix}6 & 6 & 6\\6 & 6 & 6\\12 & 12 & 12\\8 & 10 & 9\end{bmatrix}4\times3$$

பெருக்கலுக்காக அனுசரித்து இரு அணிகளைப் பாகுபடுத்துதல் (Martrices partitioned Conformable for multiplication)

AB ஐ வரையறுக்கக்கூடிய வரையில் A என்பது, $m\times n$ என்ற தரத்தைப் பெற்றும், B என்பது, $n\times p$ என்ற தரத்தைப் பெற்றும் அமையட்டும். இப்பொழுது, A என்ற அணியை யாதாமொரு விதத்தில் பாகுபடுத்தினுல், பெருக்கலுக்கு அனுசரிக்கும் விதத்தில் Bஐப் பாகுபடுத்துவோம்.

உதாரணமாக,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & -2\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\3 & -1\end{bmatrix}\text{ என்க.}$$

Aஐ யாதாமொரு விதமாகக் கீழ்க்காணுமாறு பாகுபடுத்துவோம்.

$$A=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 0 & 2\\ & & \\0 & 1 & -2\end{array}\right]\quad \text{இப்பொழுது, B ஐ}\quad \left[\begin{array}{cc}1 & 0\\0 & 1\\ \hdashline 3 & -1\end{array}\right]$$

என்றவாறு A–யுடன் பெருக்கலுக்கு அனுசரிக்கும் வகையில் பாகுபடுத்துகிறேம்.

$$\text{எனவே } AB = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}\right] \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \cdots\cdots \\ [3-1] \end{matrix}\right]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} [3 \;\; -1]\right]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

1-H சிறப்பு அணிகளுக்கிடையேயுள்ள சில தொடர்புகள் (Some relationships involving special matrices)

(1) ஒரு சதுர அணியை மேல் முக்கோண அணி, கீழ் முக்கோண அணி, மூலை விட்ட அணி ஆகியவற்றின் கூட்டலாக அமைக்கமுடியும். $A = [a_{ij}]$ என்பது, கொடுக்கப்பட்ட சதுர அணி ஆகவும், $V = [u_{ij})$ என்பது மேல் முக்கோண அணியாகவும் இருந்தால், பின்பு $u_{ij} = a_{ij} \ \forall \ j > i$. இதைப்போல் $l_{ij} = a_{ij} \ \forall \ i > j$ இதில், $[l_{ij}] = \llcorner$ என்பது, கீழ் முக்கோண அணியாகும். இங்கு மூலைவிட்ட மூலகங்கள் மட்டும் விடப்பட்டுள்ளன. இப்பொழுது, மூலைவிட்ட அணியை $\wedge$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், $a_{ij} = u_{ij} + b_{ij}, \lambda_{ij} \ \forall \ i = j$, என்று தேவைப்படுகின்றது.

இந்தச் சமன்பாடு பல்வேறு வழிகளில் திருப்தி செய்யப்படலாம் என்பதால், இந்தச் சேர்மானம் (combination) முடியுமானதாகிறது. இந்தச் சமன்பாட்டை இரு வழிகளில் திருப்தி செய்யலாம்.

(i) $\lambda_{ij} = 0, v_{ij}$ அல்லது $l_{ij} = 1 \ \forall \ i = j$

(ii) $V_{ij} = 1, l_{ij} = 1 \ \forall \ i = j.$

மாதிரி :

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 19 \end{bmatrix}$$

என்ற அணியை மேல் முக்கோண, கீழ்முக்கோண, மூலைவிட்ட அணிகளின் கூடுதல்களாக அமைக்க முடியும்.

இப்பொழுது, (1)-ல் உள்ளபடி

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 11 & 12 & 18 \end{bmatrix}$$

என்றமைக்கிறோம். இதில் $\lambda_{ij} = 0, K_{ij} = 1, \forall\ i = j$

இப்பொழுது,

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 11 & 12 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

$$= u_{ij} + l_{ij} + \lambda_{ij}$$

2. எந்த ஒரு சதுர அணியையும், கீழ் முக்கோண அணி, மேல் முக்கோண அணி ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலனாக அமைக்க முடியும்.

A என்ற சதுர அணியின் a_{ij} என்ற பொது மூலகத்தையும் L என்ற அலகு சீர் முக்கோண அணி (unit lower triangular) l_{ij} என்ற பொது மூலகத்தையும், U என்ற மேல் முக்கோண அணி (upper triangular matrix) U_{ij} என்ற பொது மூலகத்தையும் பெற்று அமையட்டும்.

இப்பொழுது, A = LU என்றிருக்குமாறு, l_{ij}, u_{ij} ஆகிய மூலகங்களைக் காணவேண்டும்.

$$A = LU$$

$$\Longrightarrow a_{ij} = \Sigma\ l_{ik}\ u_{kj} \tag{1}$$

எப்படியாயினும்,

$$\left.\begin{aligned} u_{ij} &= 0\ \forall\ i>j \\ l_{ij} &= 0\ \forall\ i<j \\ l_{ij} &= 1\ \forall\ i=j \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

என்ற கட்டுப்பாடு உள்ளது.

சமன்பாடு (1)-ல், $i = 1$, எனில்,

$$a_{1j} = l_{11}\ U_{ij} \text{ என்றாகிறது.}$$

ஏனெனில், $l_{ij} = 0\ \forall\ j > 1$

எப்படியும் $l_{11} = 1$

எனவே, $U_{1j} = a_{1j}$

இப்படி மேல் முக்கோண அணியின் முதல் நிரையைக் காண முடியும்.

இப்பொழுது, (1)-ல் $j = 1$ எனில்,

$$a_{i1} = l_{i1}\, u_{11}$$

ஏனெனில், $u_{ij} = 0 \ \forall\ i > 1$

U_{11} ஐ முன்பே கண்டுபிடித்து விட்டமையால்,

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}$$

இப்படிக் கீழ் முக்கோண அணியின் முதல் நிரலின் மூலகங்களைக் காண முடிகிறது.

இவ்வாறே, $i = 2$ என (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$a_{2j} = l_{21}\, u_{1j} + l_{22}\, u_{2j}$$

இதன் மூலம் மேல் முக்கோண அணியின் இரண்டாம் நிரை மூலகங்களை அறிய முடிகிறது. (ஏனெனில், l_{21}, u_{1j}, l_{22} ஆகியவை தெரிந்துள்ளமையால்) இப்படி இந்த முறையைப் பயன்படுத்திக் கொண்டே போனால், மேல் முக்கோண அணியையும், அலகு கீழ் முக்கோண அணியையும் காணமுடியும்.

மாதிரி :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

என்ற அணியை அலகு கீழ் முக்கோண அணி, மேல் முக்கோண அணி ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலனாக அமைக்கவும்.

கீழ் மேல்முக்கோண அணிகளான L, U ஆகியவற்றை,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$ என்க.

எனவே, $A = LU$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

இப்பொழுது பெருக்கல் பலனைக் கருதினால், $(i=1)$,

$$u_{11} = 1, u_{12} = 2, u_{13} = 4$$

இப்பொழுது பெருக்கலின் முதல் நிரலைக் கருதினால், $(j=1)$

$$l_{21} = \frac{3}{u_{11}} = 3, \; l_{31} = \frac{2}{u_{11}} = 2$$

இவ்வாறே, பெருக்கலின் இரண்டாம் நிரை (i = 2) ஐக் கருதினால்,

$$8 = l_{21} u_{12} u_{22}$$

அல்லது $u_{22} = 2$ என்றும்,

$$14 = l_{21} u_{13} + u_{23} \cdot \text{அல்லது } u_{23} = 2$$

இப்பொழுது, பெருக்கலில் இரண்டாம் நிரலின் $(j=3)$ மீதியுள்ள உறுப்பு,

$$6 = l_{31} u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} \text{ அல்லது } l_{32} = 1$$

இறுதியாக, பெருக்கலின் கடைசி நிரையை $(i=3)$ அல்லது நிரலை $(j=3)$ ஐக் கருதினால்,

$$13 = l_{31}, u_{13} + l_{32} u_{23} + u_{33}$$

அல்லது $u_{33} = 3$.

எனவே,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

இவ்வாறு, $A = LU$

கவனிக்கவும்: ஒரு சதுர அணியை, கீழ் முக்கோண அணி, அலகு மேல் முக்கோண அணி (unit upper triangular matrix) ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலனாக அமைக்க முடியும்.

மேலுள்ள இதே குறியீடுகளைக் (notation) கையாண்டால்,

$$A = LU, \quad a_{ij} = \sum_k i_{ik}, u_{kj}$$

இங்குக் கட்டுப்பாடுகள் வேறுவிதமாக அமைந்துள்ளன.

அதாவது,

$$\left.\begin{aligned} u_{ij} &= 0 \;\forall\; i > j \\ l_{ij} &= 0 \;\forall\; i < j \\ u_{ij} &= 0 \;\forall\; i = j \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(i)-ல் $j=1$ எனப் பிரதியிட்டால், $a_{i1} = l_{i1}, u_{11}$. $u_{11} = 1$ என்பதால், l_{i1} ஐ அறிய முடிகிறது. அதாவது, கீழ் முக்கோண

அணியில் முதல் நிரலின் மூலகங்களை அறிய முடிகிறது. இப்பொழுது $i=1$ என்றால், மேல்முக்கோண அணியின் முதல் நிரை மூலகங்களை அறியலாம். இவ்வாறே மேலேயுள்ள முறையைக் கையாண்டால், L, U என்ற அணிகளை முழுவதுமாகக் காணலாம்.

A என்ற ஒரு சதுர அணி கட்டப்பட்ட அணியாக (banded matrix) இருந்தால், அதனை L, U முறையில் அமைப்பது மிகவும் பயனுள்ளதாகும்.

மேற்குறிப்பிட்டுள்ள அதே குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தினல்,

$$a_{ij} = \sum_k l_{ik}, u_{kj}$$

இங்குக் கட்டுப்பாடுகள், $u_{ij} = 0 \ \forall \ i < j$

$$l_{ij} = 1 \ \forall \ i = j$$

$$a_{ij} = 0 \ \forall \ |i-j| > m$$

$i=1$ என்ற வகையைக் கருதினல், $u_{ij} = a_{ij} \ \forall \ i \leqslant m+1$, $u_{ij} = 0 \ \forall \ j > m+1$ என்றுகும்.

இப்பொழுது $j=1$ எனில், $l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{u_{11}} \ \forall \ i \leqslant m+1$

$$l_{i1} = 0 \ \forall \ i > m+1.$$

இவ்வாறு மற்ற நிரை, நிரல்களுக்கும் செய்து கொண்டே போனல், இஃது எல்லா நிரை நிரல்களுக்குமான வகையாகக் காணப்படுகிறது.

மாதிரி :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

என்ற அணியை அலகு கீழ் முக்கோண அணி, மேல் முக்கோண அணி ஆகியவற்றின் பெருக்கல்களாக அமைக்கவும்.

கொடுக்கப்பட்ட சதுர அணி ஒரு கட்டப்பட்ட அணி (banded matrix) என்பதை அறிக.

கீழ் முக்கோண அணியின் மூலகங்களை l_{ij} என்றும், மேல் முக்கோண அணியின் மூலகங்களை u_{ij} என்றும் கொண்டால் A-ன் முதல் நிரைக்கு,

$$u_{11} = 1, u_{12} = 2, \ u_{13} = 0, u_{14} = 0$$

இப்பொழுது, A-ன் முதல் நிரலைக் கருதினால்

$$l_{21} = \frac{2}{u_{11}} = 2$$

$$l_{31} = \frac{0}{u_{11}} = 0$$

$$l_{41} = \frac{0}{u_{11}} = 0$$

இப்போது, A-ன் இரண்டாம் நிரையைக் கருதினால், $u_{22} = 2$,

$$u_{23} = 2, \quad u_{24} = 0$$

இப்பொழுது, A-ன் இரண்டாம் நிரலைக் கருதினால்,

$$l_{32} = 3, \quad l_{42} = 0$$

இவ்வாறே, மூன்றும் நிரையும், நிரலும்,

$$u_{33} = 3, \quad u_{34} = 3, \quad l_{43} = 4$$

என்றும், நான்காம் நிரை $u_{44} = 4$ என்றும் அளிக்கிறது.

$$\therefore A = LU$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

பயிற்சி 1

1. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

எனில், (i) A+B (ii) A−B (iii) —A (iv) 2A−3B ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

எனில் A+B−D = 0 என்றிருக்கும் வகையில் $D = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$

என்ற அணியைக் காண்க.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

எனில், AB ஐக் கணக்கிட்டு AB ≠ BA என்பதை நிறுவுக.

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

எனில் AB ஐக் காண்க.

5. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

எனில், AB-ன் வரையறையைக் கூறுக.

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

எனில், AB, CA என்ற அணிகள் பூச்சிய அணிகளென்பதையும், BA, AC என்ற அணிகள் பூச்சியமில்லா அணிகள் என்பதையும் நிறுவுக.

7. கீழ்க்காணும் அணிகளின் பெருக்கலான AB என்ற அணி பூச்சிய அணி என நிறுவுக.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c_2 \end{bmatrix}$$

8. ஓர் உதாரணம் மூலமாக, A என்ற அணியும், B என்ற அணியும் பூச்சிய அணிகளாக இல்லாதபோது, AB = 0 = BA என்பதைக் காட்டுக.

9. A, B என்ற இரு சதுர அணிகளைக் கருதினால், பிரதி (A + B) = பிரதி (A) + பிரதி (B) என்பதை நிறுவுக.

10. $m \times n$ என்ற தரத்தைப் பெற்ற C என்ற அணியையும், $n \times m$ என்ற தரத்தைப் பெற்ற G என்ற அணியையும் கருதினால், பிரதி (C G) = பிரதி (G C) என்பதை நிறுவுக.

11. A, B, C, என்ற $n \times n$ தரத்தைப்பெற்று அணிகளைக் கருதினால், பிரதி (A B C) = பிரதி (BCA) = பிரதி (BAC) = பிரதி (C B A) என்பதை நிறுவுக.

12. கீழ்க்காணும் தொடர்பை நிரூபிக்க a, b, c-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

$$\begin{bmatrix} 3+a & 3a-2b \\ -3a-c & a+b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7+2b \\ b+4 & 2a \end{bmatrix}$$

13.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

எனில், $(AB)^T = B^T A^T$ என்பதை நிறுவுக.

14.
$$A = \begin{bmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \text{ எனில்,}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\Theta & \sin 2\Theta \\ \sin 2\Theta & \cos 2\Theta \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\Theta & \sin 3\Theta \\ -\sin 3\Theta & \cos 3\Theta \end{bmatrix}$$

என்பதை நிறுவி A^n- ன் மதிப்பை நிறுவுக.

15. அணி நுண் கணிதத்தில்,

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$
$$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$$

என்றிருப்பது ஏன் என்பதை விளக்குக.

16. AB = BA எனக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், r, s, என்ற நேர்முழு எண்களுக்கு $A^r B^s = B^s A^r$ என்பதை நிறுவுக.

17. $\alpha A = \beta A$, $A \neq 0$ எனில், $\alpha = \beta$ (அளவைகள்) என்பதை நிறுவுக.

18. சாதாரணமாக, $AA^T \neq A^TA$ என்பதையும், ஆனால் AA^Tம், A^TA-ம் சமச்சீருடைய அணிகள் என்பதை நிறுவுக. மேலும் A-ன் மூலகங்கள் மெய்யெனில் AA^T, A^TA-ன் மூலைவிட்ட மூலகங்கள் நேர்மூலகம் என்பதை நிறுவுக.

19. α என்பது திசையிலியானால்,

$(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*, A = \bar{\bar{A}}, (\bar{A})^T = (\overline{A^T}), (A^*)^* = A, (A+B)^* = A^* + B^*, \overline{AB} = \bar{A}\,\bar{B}, (AB)^* = B^* A^*$ என்பதை நிறுவுக.

20. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $A = (b_{ij})_{n \times n}$ எனில், கீழ்க்கண்ட அணிகளின் பெருக்கல்களை அமைக்கவும்.

$$\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}\right], \quad \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, b_{jk}\right]$$

$$\left[\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, a_{kj}\right], \quad \left[\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\, a_{ik}\right]$$

21. A என்ற சதுர அணியைக் கருதி, $A^2 = I$ என்றிருந்தால், அதைத் தன்னெதிர் அணி (involuntory) என்கிறோம். $(A-I)(A+I) = 0$ எனில், A என்ற அணி தன்னெதிர் அணி என நிறுவுக.

22.
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -0 & -4 \\ 3 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

என்ற அணி தன்னெதிர் அணி என்று நிறுவுக.

23.
$$A = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -^2 & -ab \end{bmatrix}$$

என்ற அணி பூச்சிய அடுக்கு அணி என்று நிறுவுக.

24. A என்ற ஒவ்வொரு சதுர அணியும் $P + iQ$ என்ற தனிப்பட்ட முறையில் எழுதலாம் என்பதைக் காட்டுக. இதில் P,Q என்பவை ஹெர்மிஷன் அணிகளாகும்.

25. A என்ற சதுர அணியில் $a_{ij} = 0 \;\forall\; i > j$ எனில், அதை மேல் அணி (upper matrix) என்கிறோம்.

உதாரணமாக,

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

என்பது, ஒரு மேல் அணியாகும். U என்ற ஒவ்வொரு மேல் அணியும் பூச்சிய அடுக்கு அணி என்பதை நிறுவுக.

26. B என்ற சதுர அணிக்கு B^Tஐக் கண்டு அது மேல் அணியானால், அந்த அணியைக் கீழ் அணி (lower matrix) என்கிறோம். ஒவ்வொரு கீழ் அணியும் பூச்சிய அடுக்கு என்பதை நிறுவுக.

27. A என்ற ஒவ்வோர் அணிக்கும், A^*A, AA^* ஆகியன ஹெர்மிஷின் என்பதைக் காட்டுக.

28. குறிக்கப்பட்டுள்ள பாகுபாட்டின்மூலம் கீழ்க்காணும் அணிகளின் பெருக்கலைக் காண்க.

$$\left[\begin{array}{cc:cc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ \hdashline 3 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ \hdashline 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ \hdashline 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

29. $AB = C$ எனில், அதாவது, $A\,[B_1 B_2 \ldots B_p] = [C_1 C_2 \cdots C_p]$. இவற்றில். B-ம் C-ம் நிரல்களாகப் பாகுபடுத்திய அணிகளாகும்.

$$A = \sum_{j=1}^{P} B_j = \sum_{j=1}^{P} C_j$$ என்பதை நிறுவுக.

30. $A = [A_{ij}]$ இதில். A_{ij} என்பது கீழ் அணிகளெனில், $[A_{ij}]^2 = [A_{ji}[^T$ என்பதை நிறுவுக.

2. அணிக்கோவைகள்

(Determinants)

கணிதத்தின் பல பிரிவுகளில் ஒருபடிச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்கிறோம். அச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகள் இருக்கின்றனவா, இல்லையா என்பதை நிர்ணயிக்கவும், அப்படித் தீர்வுகள் இருப்பின், அவற்றைக் காணவும், அணிக்கோவைகளைப் பயன்படுத்துகிறோம். இவ் வத்தியாயத்தில், அவ் வணிக்கோவைகளைப்பற்றிக் காண்போம்.

2-A. அணிக்கோவைகளின் விரிப்பு (Expansion of Determinants)

$$a_1 x + b_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 = 0$$

என்ற சமன்பாடுகளைக் கருதுக.

பிறகு, $$-x = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$$

இவ்வாறு மேலேயுள்ள சமன்பாடுகள், பொதுவாகத் தீர்வைப் பெறவேண்டுமெனில், $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$,

அதாவது, $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ .....(2·1) என்றிருக்கவேண்டும்.

$$(2{\cdot}1) \text{ ஐ } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \;\ldots\ldots\; (2{\cdot}2)$$

என்று எழுதலாம். சமன்பாடு (2·2)-ன் இடப்பக்க அங்கத்தை இரு தர அணிக்கோவை என்கிறோம்.

இப்பொழுது, கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளைக் கருதுவோம்.

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \;\ldots\ldots (2{\cdot}3)$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \;\ldots\ldots (2{\cdot}4)$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0 \;\ldots\ldots (2{\cdot}5)$$

(2.4)-க்கும், (2.5) க்கும் தீர்வு கண்டால்,

$$x = \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2},\quad y = \frac{c_2 a_3 - c_3 a_2}{a_2 b_3 - a_3 b_2}$$

என்று கிடைக்கிறது.

இவற்றை (2-3)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + b_1 (c_2 a_3 - c_3 a_2) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) = 0 \;\ldots\ldots (2.6)$$

என்று பெறுகிறோம். எனவே, (2.3), (2.4), (2.5) என்ற சமன்பாடுகள் பொது தீர்வைப் பெறத் தேவையான நிபந்தனை (2.6)-ல் உள்ளது. (2.6)-ன் இடப்பக்க அங்கத்தை,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \triangle \quad \text{என்றெழுதலாம்.}$$

இதனை முத்தர அணிக்கோவை என்கிறோம். இதன் மதிப்பான, $a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + b_1 (c_2 a_3 - c_3 a_2) + c_1(a_2 b_3 - a_3b_2$ ஐ),

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

என்றும் எழுதலாம்.

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, \ldots\ldots$ ஆகியவற்றை அணிக் கோவைகளின் மூலகங்கள் என்று கூறுகிறோம்.

அணிக் கோவையின் குறுக்காக உள்ள மூலகங்களை நிரைகளென்றும், நெடுக்காக உள்ள மூலகங்களை நிரல்களென்றும் கூறுகிறோம். மூலைவிட்டத்திலுள்ள மூலகங்களை $(a_1 b_2 c_3)$ அணிக் கோவையின் தலையாய மூலைவிட்டம் என்று கூறுகிறோம்.

2–B விரிப்பு விதி

முதல் நிரையின் ஒவ்வொரு மூலகத்தை, அவைகள் அமைந்துள்ள நிரையையும், நிரலையும் நீக்கிப் பெறப்பட்ட அணிக் கோவையுடன் பெருக்கியபின் நேர், எதிர்க்குறிகளை ஒன்று விட்டுப் பெருக்கல்களுடன் இணைத்தால், அதுவே கொடுக்கப் பட்ட அணிக்கோவையின் விரித்தலாகும்.

அணிக்கோவையின் மூலகங்களுக்கான நேர், எதிர்க்குறிகளை வட்டமான (cyclic) முறையில் அமைக்கிறோம். உதாரணமாக, முத்தரத்தைப் பெற்ற அணிக்கு

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overset{+}{a_1} & \overset{-}{b_1} & \overset{+}{c_1} \\ \overset{-}{a_2} & \overset{+}{b_2} & \overset{-}{c_2} \\ \overset{+}{a_3} & \overset{-}{b_3} & \overset{+}{c_3} \end{vmatrix}$$ என்று குறிக்கிறோம்.

இதில், (i) $3^2 = 9$ மூலகங்கள் உள்ளன.

(ii) $3! = 6$ உறுப்புகளில், 3 உறுப்புகள் நேர்க் குறியையும், மீதி 3 உறுப்புகள் எதிர்க் குறியையும் பெற்று அமையும்.

(iii) ஒவ்வோர் உறுப்பும் (term) 3 காரணி பகுப்பு களின் (factors) பெருக்கல்களோடன்றி, இவைகள் ஒவ்வொரு நிரையிலிருந்தும் ஒரு மூலகத்தையும், பெருக்கிப் பெறப்பட்டதாகும். எனவே, a,b,c, என்ற எழுத்துக்களை இயற்கை யான வரிசையில் அமைத்து, அவற்றின் பின்சேர்குறியை (suffix) எல்லா வழிகளிலும் அமைத்து, உறுப்புகளைப் பெறுகிறோம்.

(iv) ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பின் குறியானது, பின் சேர்குறியின் (suffix) வரிசையைப் பொறுத்து அமையும்.

a_1, b_2, c_2 என்ற உறுப்பில் பின்சேர்குறிகள் இயற்கையான வரிசையுள்ளமையால், இவ்வுறுப்பு நேர் உறுப்பாக அமையும். $a_3b_1c_2$ என்ற உறுப்பைக் கருதினால், பின்சேர்குறியான 3, 1, 2-ல் 3 ஆனது 1, 2 ஆகியவற்றுக்கு அடுத்து அமையவேண்டும். எனவே, இதில் இரண்டு நேர் மாற்றங்கள் (inversions) உள்ளன. மேலும் $a_3b_2c_1$ என்ற உறுப்பைக் கருதினால் கீழ்க்குறியில் 3ஆனது 1, 2, ஆகியவற்றுக்கு அடுத்தும், 2ஆனது 1-க்கு அடுத்தும் அமையவேண்டும். எனவே, இதில் மூன்று நேர்மாற்றங்கள் (inversions) உள்ளன. இதைப்போல் மற்ற உறுப்புகளுக்கும் எத்தனை எதிர்மாற்றங்கள் உள்ளன என்பதை அறியலாம்.

மாதிரி : கீழ்க்காணும் அணிக்கோவைகளை விரித்தெழுதி, அதன் மதிப்புக் காண்க.

(a) $\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$

(a) $8\,(4) - (7)(-3) = 53$

(b) $$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} h & g \\ f & c \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} h & g \\ b & f \end{vmatrix}$$

$$= a\,(bc - f^2) - h\,(hc - gf) + g\,(hf - bg)$$
$$= (abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - cb^2)$$

2-C சிற்றணிக்கோவை (Minor)

கொடுக்கப்பட்ட அணியில் ஒரு மூலகத்தின் சிற்றணிக் கோவையானது, அம் மூலகம் அமைந்துள்ள நிரையையும், நிரலையும் நீக்கக் கிடைக்கும் அணிக்கோவையாகும்.

உதாரணமாக, $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

என்ற அணிக்கோவையில் a_1, b_2, c_3 ஆகியவற்றின் சிற்றணிக் கோவைகள் முறையே,

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$ ஆகும்.

எனவே, $\Delta = a_1$ (a_1-ன் சிற்றணிக் கோவை) $- b_1$ (b_1-ன் சிற்றணிக்கோவை)

$+ c_1$ (c_1-ன் சிற்றணிக்கோவை)

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad -6_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad +c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

2-D இணைக்காரணி (Cofactor)

அணிக்கோவையில் ஒரு மூலகத்தின் இணைக்காரணி என்பது, அம் மூலகத்தின் குறியோடு கருதிய சிற்றணிக்கோவையாகும். உதாரணமாக, Δ-ல் a_1, b_1, c_1 ஆகியவற்றின் இணைக்காரணிகள் முறையே

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$ ஆகும்.

விதி : ஒரு நிரையின் (நிரலின்) மூலகங்களின் இணைக் காரணிகளை மற்றொரு நிரையின் (நிரலின்) மூலகங்களோடு வரிசைக் கிரமமாகப் பெருக்கியபின் அதன் கூட்டு, பூச்சியமாகும்.

ஒரு சதுர அணியின் அணிக்கோவை.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = [a_{ij}]_{n \times n}$$

என்ற சதுர அணியைக் கருதுக.

A-ன் மூலகங்களின் பெருக்கல் $a_{1j}, a_{2j_2} \ldots\ldots a_{nj_n}$ ஒரு நிரையிலிருந்து ஒரே மூலகமும், ஒரு நிரலிலிருந்து ஒரே மூலக மாக வருவித்துப் பெறப்பட்டதாகும்.

மேலுள்ள மாதிரியான $n!$ பெருக்கல்களைத் தொடர்ந்தாற் போல் முதற் கீழ்க்குறியை இயற்கையான வரிசையிலமைந்த நிலை யில், இரண்டாம் கீழ்க்குறியின் தொடர்ச்சியான (sequence) $j_1, j_2, \ldots j_n$ என்பதை $n!$ வரிசை மாற்றங்களில் (permutations) ஒன்றாகவும் பெறுகிறோம்.

i. n. வரிசைமாற்றங்களான கீழ்க்குறிகள் $P = \begin{matrix} 1 & 2 \ldots\ldots n \\ \vdots & \\ j_1 & j_2 \cdots\cdots jn \end{matrix}$

இதில் $j_1, j_2 \ldots\ldots j_n$ என்பவை n! வரிசை மாற்றங்களில் ஒன்றாகும்.

2-E இரட்டை வரிசை மாற்றமாயிருத்தல் (Even Permutation)

பெருக்கல் நேர்க்குறியுடன், ஒற்றை வரிசை மாற்றமாயிருந் தால் (odd permutations) பெருக்கல் நேர் எதிர்க்குறியுடனும் அமையும். மேலேயுள்ள $n!$ பெருக்கலின் (சரியான குறியோடு கொண்ட) கூட்டலே அணியின் அணிக்கோவையாகும். இதனை $|A|$ அல்லது (a_{ij}) என்றும் குறிக்கலாம். இவ்வாறாக, $|A| = \ldots\ldots |a_{ij}| = \Sigma \pm (a_{ij}\, a_2\, j_2 \ldots a_n\, j_n)$.

மாதிரி :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

இதில், 2.! வரிசை மாற்றங்கள் உள்ளன. அவை,

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

எனவே, பெருக்கல்கள் $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$ என்றாகும். P_1-ல் எதிர் மாற்றங்கள் (inversions) இல்லை. P_2-ல் ஓர் எதிர் மாற்றம்

உள்ளது. எனவே, P_1 இரட்டை வரிசை மாற்றத்தைப் பெற்றும் P_2 ஒற்றை வரிசை மாற்றத்தைப் பெற்றும் அமைந்துள்ளன. எனவே, பெருக்கல் மதிப்பு,

$+ a_{11} a_{22}, - a_{12} a_{21}$ என்றாகிறது. $\therefore |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$= (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$

3×3 என்ற தரத்தைப் பெற்ற அணிக்கோவை (Determinant of order three),

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}_{3 \times 3}$$

இதில் 3! வரிசை மாற்றங்களுள்ளன. அவை பின் வருமாறு.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

எனவே, பெருக்கல்களின் மூலங்கள்,

$+ a_{11} \; a_{22} \; a_{33}$ (P_1 இரட்டை வரிசை மாற்றத்தைப் பெற்றுள்ளமையால்)

$- a_{11} \; a_{23} \; a_{32}$ (P_2 ஒற்றை வரிசை மாற்றத்தைப் பெற்றுள்ளமையால்)

$+ a_{12} \; a_{23} \; a_{31}$ (P_3 இரட்டை வரிசை மாற்றத்தைப் பெற்றுள்ளமையால்)

$- a_{12} \; a_{21} \; a_{33}$ (P_4 ஒற்றை வரிசை மாற்றத்தைப் பெற்றுள்ளமையால்)

$+ a_{13} \; a_{21} \; a_{32}$ (P_5 இரட்டை வரிசை மாற்றத்தைப் பெற்றுள்ளமையால்)

$- a_{13} \; a_{22} \; a_{31}$ (P_6 ஒற்றை வரிசை மாற்றத்தைப் பெற்றுள்ளமையால்)

எனவே, $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} \\ + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} \\ + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} \end{matrix}$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

2-F அணிக்கோவைகளின் தன்மைகள் (Properties of Determinants)

தன்மை 1 : ஓர் அணிக்கோவையின் நிரைகளை நிரல்களாகவோ, அல்லது நிரல்களை நிரைகளாகவோ மாற்றினால் அவ்வணிக்கோவையின் மதிப்பு மாறுவதில்லை.

அதாவது,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

இடது பக்க அணிக்கோவையை விரித்தால்,

$$\text{இ.ப.} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2c_1b_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

தன்மை 2 : ஓர் அணிக்கோவையின் இரண்டு நிரைகளையோ, அல்லது நிரல்களையோ அடுத்தடுத்து மாற்றினால், அவ் வணிக்கோவையின் குறிமாறுமேயன்றி அதன் பெருமானம் (Numerical value) மாறுவதில்லை.

அதாவது,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

நிரூபணம் :

$$\text{இ.ப.அ. கோவை} = a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - a_2 (b_1c_3 - b_3c_1) + a_3 (b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= - [b_1 (a_2c_3 - a_3c_2) - b_2 (a_3c_1 - a_1c_3) + b_3 (a_2c_1 - a_1c_2)]$$

$$= \text{வ.ப. அணிக்கோவை.}$$

தன்மை 3: ஓர் அணிக்கோவையின் நிரையின் அல்லது நிரலின் ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் ஓர் திசையிலியால் (scalar) பெருக்கினால், அஃது அவ்வணிக்கோவையை முழுவதும் அவ்வள வையால் பெருக்கியதற்கொப்பாகும்.

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ என்ற அணியிலிருந்து பெறப்பட்ட அணிக் கோவையை $|a_{ij}|$ என்று குறிப்போம். பிறகு, $|a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, c_{ij} இதில் c_{ij} என்பது, a_{ij} என்ற அணிக்கோவை மூலகத்தின் இணைக்காரணி (cofactor of a determinant) ஆகும். இப்பொழுது, $|a_{ij}|$-ன் i-ம் நிரையை cஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் அணிக் கோவை, $B = \sum_{j=1}^{n} c.\ c_{ij}, c_{ij} = c \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, c_{ij} = c\,|a_{ij}|$ இதே போல் jஆம் நிரலை cஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் அணிக்

$$\text{கோவை,} = \sum_{i=1}^{n} c, a_{ij}, c_{ij} = c \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, c_{ij} = c\,|a_{ij}|$$

தன்மை 4: அணிக்கோவையின் இரு நிரல்களோ, அல்லது இரு நிரைகளோ ஒத்திருந்தால், அவ் வணிக்கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

நிரூபணம் : $|A| = |aij|_{n \times m}$ என்றிருக்கட்டும்.

ஒத்திருக்கும் இரு நிரைகளை அல்லது நிரல்களை அடுத்து மாற்றினால்,

தன்மை 2-ன்படி, $|A| = -|A|$ அல்லது $2|A| = 0$

$i.e.\ |A| = 0.$

தன்மை 5 : ஒரு நிரலில் அல்லது ஒரு நிரையில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும், இரு மூலகங்களின் கூடுதலாகவோ, வித்தியாசமாகவோ இருந்தால், அந்த அணிக்கோவை இரு அணிக்கோவைகளின் கூடுதலாகும் (வித்தியாசமாகும்).

நிரூபணம் : $|A| = |a_{ij}|$ இதிலுள்ள ஒவ்வொரு iஆம் நிரையின் மூலகமும், இரு மூலகங்களின் கூடுதலாகும். அதாவது, iஆம் நிரை, jஆம் நிரல் ஆகியவற்றின் மூலகம் $a_{ij} = a_{i1j} + a_{i2j}$

பிறகு, $$|a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} (a_{i1j} + a_{i2j})\, c_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{i1j}\, c_{ij} + \sum_{j=1}^{n} a_{i2j}\, c_{ij}$$

அதாவது, $|A|$ ஐ இரு அணிக்கோவையின் கூடுதலாக அமைக்கிறோம். இதே போன்று $|A|$ ஐ இரு அணிக்கோவைகளின் வித்தியாசங்களாக அமைக்க முடியும்.

தன்மை 6: ஒரு நிரையில் அல்லது நிரலிலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்துடனும் மற்றொரு நிரலின் அல்லது நிரையின் முறையான மூலகங்களை ஓர் அளவையால் (scalar) பெருக்கிக் கூட்டினால் அணிக்கோவையின் மதிப்பு மாறாது.

நிரூபணம் : $A = [a_{ij}]_{n \times m}$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot c_{ij}$$

iஆம் நிரையுடன் c தடவை பெருக்கப்பட்ட kஆம் நிரையையும் d தடவை பெருக்கப்பட்ட lஆம் நிரையையும் கூட்டினால்,

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + ca_{kj} + da_{lj})\, c_{ij}$$ (இதில் c, d என்பன அளவைகள்),

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, c_{ij} + c \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, c_{ij} + d \sum_{j=1}^{n} a_{lj}\, c_{ij}$$

$$= |A| + 0 + 0$$

$$= |A| .$$

தன்மை 7 : Δ என்ற அணிக்கோவையின் மூலகங்கள் x-ன் விகிதமுறு முழுவெண் சார்பாக (rational integral function) இருந்து, $x=a$ எனப் பிரதியிட்டால், இரு நிரல்களும் அல்லது நிரைகளும் ஒத்திருந்தால் $(x-a)$ என்பது Δ-ன் காரணிப் பகுப்பாகும்.

தன்மை 8 : $x = a$ என Δ-ல் பிரதியிட்டால், r நிரைகள் ஒத்திருந்தால் $(x-a)^{r-1}$ என்பது Δ-ன் காரணிப் பகுப்பாகும்.

2—G அணிக்கோவைகளின் பெருக்கல் (Multiplication of Determinants)

$|A| = |a_{ij}|$, $|B| = |b_{ij}|$ என்ற 'n' தரத்தைப் பெற்ற அணிக்கோவைகளின் பெருக்கலான $|C| = |c_{ij}|$ என்ற அணி அதே தரத்தைப் பெற்றமையும். மேலும், $|C|$-ன் மூலகங்களான $c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots\ldots + a_{in}\, b_{nj}$ ஆகும். இங்கு, $|A|$-ன் 'i'ஆம் நிரையின் மூலகங்களை, $|B|$-ன் jஆம் நிரலின் முறையான மூலகங்களோடு பெருக்கியபின் அவற்றைக் கூட்டிய முடிவே c_{ij} என்ற மூலகமாகும்.

2—H சிற்றணிக்கோவையும் இயற்கணித நிரப்புயமும் (Minors and algebraic complements)

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ என்ற சதுர அலுவையைக் கருதுக. அவ் வணியில், 1,2,3...n என்ற நிரைக்குறிகளில் $i_1\, i_2 \cdot\cdot\, i_m$ என்ற 'm' வரிசையான அளவு (magnitude) களாகவும் $(1 \leqslant m < n)$, நிரல் குறிகளில் $j_1, j_2 \ldots j_m$ என்ற m வரிசையான அளவுகளாகவும் இருந்தால், மீதியுள்ள நிரை நிரல் குறிகளை வரிசையான அளவுகளாக அமைத்தால், அவை $i_{m+1}, i_{m+2} \ldots i_n$ என்றும், $j_{m+1}, j_{m+2} \ldots j_n$ என்றும் இருக்கும். இவ்வாறு நிரல், நிரை குறிகளைப் பிரிப்பதால் தனித்த அணிகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு காண முடிகிறது.

$$A\begin{matrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m \end{matrix} = \begin{bmatrix} a_{i1,\, j1} & a_{i2,\, j2} & \cdots & a_{i1,\, jm} \\ a_{i2,\, j1} & a_{i2,\, j2} & \cdots & a_{i2,\, jm} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{im,\, j1} & a_{im,\, j2} & \cdots & a_{im,\, jm} \end{bmatrix} \quad \text{—(2.7)}$$

$$A^{j_{m+1}, j_{m+2} \cdots j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2} \cdots i_n} = \begin{bmatrix} a_{i_{m+1}, j_1} & a_{i_{m+1}, j_2} & \cdots & a_{i_{m+1}, j_n} \\ a_{i_{m+2}, j_1} & a_{i_{m+2}, j_2} & \cdots & a_{i_{m+2}, j_n} \\ \vdots & & & \\ a_{i_n, j_1} & a_{i_n, j_2} & \cdots & a_{i_n, j_n} \end{bmatrix} \text{—(2·8)}$$

இவற்றை A-ன் கீழ் அணிகளென்று கூறுகின்றோம்.

(2·7), (2·8) ஆகிய ஒவ்வொன்றுக்குமான அணிக்கோவையை (determinants) A-ன் சிற்றணிக்கோவை (minor) என்றும், இந்த ஜோடி சிற்றணிக் கோவைகளை A-ன் நிரப்புகின்ற சிற்றணிக் கோவைகள் (complementary minors) என்றும் கூறுகின்றோம்.

இப்பொழுது,

$$p = i_1 + i_2 \cdots + i_m + j_1 \cdots + j_m$$
$$q = i_{m+1} + i_{m+2} \cdots + i_n + j_{m\times 1} \cdots + j_n$$

எனில், குறியிட்ட சிற்றணிக்கோவையான,

$$(-1)^p \left| A \begin{matrix} j_{m+1}, j_{m+2} \cdots j_n \\ i_{m+1}, i_{m+2} \cdots i_n \end{matrix} \right| \text{ ஐ}$$

$$\left| A \begin{matrix} j_{m+1} \cdots j_n \\ i_{m+1} \cdots i_n \end{matrix} \right|$$ -ன் இயற்கணித நிரப்புயம் (algebraic complement) என்று கூறுகிறோம்.

இவ்வாறே,

$$(-1)^q \left| A \begin{matrix} j_{m+1}, j_{m+2} \cdots j_n \\ i_{m+1}, i_{m+2} \cdots i_n \end{matrix} \right| \text{ ஐ}$$

$$\left| A \begin{matrix} j_1, j_2 \cdots j_m \\ i_1, i_2 \cdots i_m \end{matrix} \right|$$ -ன் இயற்கணித நிரப்புயம் என்கிறோம்.

மாதிரி : கொடுக்கப்பட்டுள்ள

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{bmatrix}$$

என்ற அணியின் நிரப்புகின்ற சிற்றணிக்கோவைகள் வருமாறு:

$$\left| A_{2,\,3}^{2,\,4} \right| = \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 12 & 14 \end{vmatrix}$$

$$\left| A_{2,\,4,\,5}^{1,\,3,\,5} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 16 & 18 & 20 \\ 21 & 23 & 25 \end{vmatrix}$$

இப்பொழுது,

$$\left| A_{2,\,3}^{2,\,4} \right| \text{-ன் இயற்கணித நிரப்புயம்} = (-1)^{2+3+2+4}$$

$$\left| A_{1,\,4,\,5}^{1,\,3,\,5} \right| = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 16 & 18 & 20 \\ 21 & 23 & 25 \end{vmatrix}$$

இவ்வாறே,

$$\left| A_{1,\,4,\,5}^{1,\,3,\,5} \right| \text{-ன் இயற்கணித நிரப்புயம்,}$$

$$= (-1)^{1+4+5+1+3+5} \left| A_{2,\,3}^{2,\,4} \right| = - \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 12 & 14 \end{vmatrix}$$

மாதிரி : கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சதுர அணியின் நிரப்புகின்ற சிற்றணிக்கோவைகளையும், இயற்கணித நிரப்புயங்களையும் காண்க.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

நிரப்புகின்ற அணிக்கோவைகள் பின்வருமாறு.

$$\left|A\begin{matrix}1,4\\ \\2,3\end{matrix}\right| = \begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}$$

$$\left|A\begin{matrix}2,3\\ \\1,4\end{matrix}\right| = \begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}$$

இப்பொழுது,

$$\left|A\begin{matrix}1,4\\ \\2,3\end{matrix}\right| \text{-ன் இயற்கணித நிரப்புயம்} = (-1)^{2+3+1+4}$$

$$\left|A\begin{matrix}2,3\\ \\1,4\end{matrix}\right| = \begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}$$

$$\left|A\begin{matrix}2,3\\ \\1,4\end{matrix}\right| \text{-ன் இயற்கணித நிரப்புயம்} = (-1)^{1+4+2+3}\left|A\begin{matrix}1,4\\ \\2,3\end{matrix}\right|$$

$$= \begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}$$

2-1 அணிக்கோவைக்கு 'இலாப்லாஸ்'-ன் விரிவு (Laplaces' expansion of determinats)

$|A|_{n\times m}$ என்ற அணிக்கோவையின் விரிப்பில் m நிரைகளை வரிசையாக, i_1, i_2 ... i_m என்று அளவுகள்படி (magnitude) அடுக்கி அமைப்பாகத் தேர்ந்தெடுக்கிறோம். இந்த m நிரைகளிலிருந்து சிற்றணிக் கோவைகளை அமைப்பதற்கு n நிரல்களிலிருந்து, m நிரல்களைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டியுள்ளது.

எனவே, $\begin{pmatrix}n\\ m\end{pmatrix}$ சிற்றணிக்கோவைகள் $\left|A\begin{matrix}j_1, j_2 \cdots j_m\\ \\ i_1, i_2 \ldots i_m\end{matrix}\right|$ ஐ.

n நிரல்களிலிருந்து, m நிரல்களை எல்லாச் சேர்மானங்களிலும் (combination) தேர்ந்தெடுத்து அமைக்கிறோம்.

இச் சிற்றணிக் கோவைகளையும், இவற்றின் இயற்கணித நிரப்புயங்களையும் பயன்படுத்தி | A | -ன் 'இலாப்லாஸ்' விரிப்பை,

$$|A| = \sum_{ncm} (-1)^{p+q} \begin{vmatrix} A & \begin{matrix} j_1, j_2 \cdots j_m \\ \\ i_1, i_2 \cdots i_m \end{matrix} \end{vmatrix}$$ என்றெழுதுகிறோம்.

இதில், $p + q = i_1 + i_2 \cdots + i_m + j_1 + j_2 \cdots + j_m$.

மாதிரி : கீழ்க்காணும் அணிக் கோவையை 'இலாப்லாஸ்' விரிவுமூலம் விரிக்கவும்.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} A & \begin{matrix} 12 \\ \\ 12 \end{matrix} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & \begin{matrix} 3, 4 \\ \\ 3, 4 \end{matrix} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} A & \begin{matrix} 13 \\ \\ 12 \end{matrix} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & \begin{matrix} 24 \\ \\ 34 \end{matrix} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} A & \begin{matrix} 2, 3 \\ \\ 3, 4 \end{matrix} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & \begin{matrix} 1, 4 \\ \\ 1, 2 \end{matrix} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} A & \begin{matrix} 2, 3 \\ \\ 1, 2 \end{matrix} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & \begin{matrix} 1, 4 \\ \\ 3, 4 \end{matrix} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} A & \begin{matrix} 2, 4 \\ \\ 1, 2 \end{matrix} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & \begin{matrix} 1, 3 \\ \\ 3, 4 \end{matrix} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} A & \begin{matrix} 3, 4 \\ \\ 1, 2 \end{matrix} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & \begin{matrix} 1, 2 \\ \\ 3, 4 \end{matrix} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}3 & 5\\2 & 4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & 0\\3 & 4\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}3 & 7\\2 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & 0\\1 & 4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}5 & 7\\4 & 1\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}-2 & 0\\1 & 4\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}5 & 2\\4 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-2 & 0\\1 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}7 & 2\\1 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-2 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}$$

$$= (5-28)(-8)(5-8)(-6)+(7-2)(-2)$$

$$= 184-18-10 = 156$$

மாதிரி : கீழ்க்காணும் அணிக்கோவைக்கு முதல், மூன்றும் நிரைகளைப் பயன்படுத்தி 'இலாப்லாஸ்' விரிப்பைக் காண்க.

$$|A| = \begin{vmatrix}3 & 4 & 1 & 5\\2 & 8 & 7 & 6\\1 & 0 & 5 & 4\\9 & 9 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{1+3+1+2}\left|A^{1,2}_{1,3}\right|\left|A^{3,4}_{2,4}\right|$$

$$+(-1)^{1+3+1+3}\left|A^{1,3}_{1,3}\right|\left|A^{2,4}_{2,4}\right|$$

$$+(-1)^{1+3+1+4}\left|A^{1,4}_{1,3}\right|\left|A^{2,3}_{2,4}\right|$$

$$+(-1)^{1+3+2+3}\left|A^{2,3}_{1,3}\right|\left|A^{1,4}_{2,4}\right|$$

$$+(-1)^{1+3+2+4}\left|A^{2,4}_{1,3}\right|\left|A^{1,3}_{2,4}\right|$$

$$+(-1)^{1+3+3+4}\left|A^{3,4}_{1,3}\right|\left|A^{1,2}_{2,4}\right|$$

$$= -\begin{vmatrix}3 & 4\\1 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}7 & 6\\1 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3 & 1\\1 & 5\end{vmatrix}\begin{vmatrix}8 & 6\\9 & 3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}3 & 1\\5 & 4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}8 & 7\\9 & 1\end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix}4 & 1\\0 & 5\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 6\\9 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}4 & 5\\0 & 4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 7\\9 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & 5\\5 & 4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 8\\9 & 9\end{vmatrix}$$

$$= -(-4)(21-6) + (15-1)(24-54) - (12-5)(8-63)$$
$$-20(6-54) + 16(2-63) - (4-25)(18-72)$$

$$= 60 - 420 + 385 + 960 - 976 - 1134$$

$$= 60 - 35 - 16 - 1134$$

$$= -1125$$

2-J சமச்சீர் எதிர்ச்சீர் அணிக் கோவைகள் (Symmetric and Skew-Symmetric Determinants)

ஓர் அணிக்கோவையில் iஆம் நிரையையும், jஆம் நிரலும், jஆம் நிரையும், iஆம் நிரலும் வெட்டுமிடத்தில் (intersection) அமைந்துள்ள இரு மூலகங்கள் இணை மூலகங்கள் (conjugate elements) என்று கூறுகின்றோம். ஓர் அணிக்கோவையில் இணை மூலகங்கள் சமமாயிருந்தால், அந்த அணிக் கோவையைச் சமச்சீர் அணிக் கோவை என்கிறோம். எனவே, $A = [a_{ij}]_{n\times m}$, $a_{ij} = a_{ji}$ எனில், $|A|$ ஐச் சமச்சீர் அணிக்கோவை என்கிறோம். ஆனால் $a_{ij} = -a_{ji}$ எனில், $|A|$ ஐ எதிர்ச்சீர் அணிக்கோவை என்கிறோம்.

மாதிரி : ஒற்றைத் தரத்தைப் (odd order) பெற்ற எதிர்ச்சீர் அணிக்கோவைகள் பூச்சிய மதிப்பைப் பெறுகின்றன என்பதை நிறுவுக.

A என்பது, $n\times n$ என்ற தரத்தைப் பெற்ற எதிர்ச்சீர் அணியாகும். எனவே, $A = -A^T$. இப்பொழுது, $|A| = |A^T| = (-1)^n\ |A^T|$ n என்பது, ஒற்றை எனில்,

$$(-1)^n\ |A^T| = -\ |A^T| = -A$$

அதாவது, $|A| = 0$

2-K வட்ட அணிக்கோவை (Circulant Determinant)

ஓர் அணிக்கோவையில் அதே மூலகங்கள் நிரைகளில் வட்ட வரிசையில் அமைந்திருந்தால், அவ்வணியை வட்ட அணிக்கோவை என்கிறோம்.

உதாரணமாக,

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ x_m & x_1 & \cdots & x_{m-1} \\ x_{m-1} & x_m & \cdots & x_{m-2} \\ \vdots & & & \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_1 \end{vmatrix}$$

என்பது வட்ட அணிக் கோவையாகும்.

தலைகீழ் அணிக்கோவை (Reciprocal Determinant)

$$\blacktriangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ என்க.

$$\blacktriangle^1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$ என்க. இதில் $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$

C_1, C_2, C_3 ஆகியவை, $a_1, a_2, a_3, b_1\ b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ பிறகு $\triangle^1$ஐ $\triangle$-ன் தலைகீழ் அணிக் கோவை என்கிறோம்.

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ எனில்,

$\triangle = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3$ ஆகும்.

மேலும்,

$$a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 = 0$$
$$a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 = 0$$
$$a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 = a_3A_2 + a_3B_2 + c_3C_2 = 0$$

$$a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 = a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3 = 0$$
$$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = b_1C_1 + b_2C_2 + b_3C_3 = 0$$
$$c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = c_1B_1 + c_2B_2 + c_2B_3 = 0$$

தேற்றம் : $A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\triangle^1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$

எனில் $\triangle^1 = \triangle^2$ ஆகும்.

நிரூபணம் : வகை I : $\triangle \neq 0$

$\triangle\triangle^1$ஐக் கருதுக. அதாவது, $\triangle\triangle^1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1 & a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2 & a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3 \\ a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1 & a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2 & a_2A_3+b_2B_2+c_2C_3 \\ a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1 & a_3A_2+b_3B_2+c_3C_2 & a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \triangle & 0 & 0 \\ 0 & \triangle & 0 \\ 0 & 0 & \triangle \end{vmatrix} = \triangle^3$$

$$\therefore \triangle\triangle^1 = \triangle^3$$

$\Longrightarrow \triangle^1 = \triangle^2$ ($\triangle \neq$ என்பதால்)

வகை II : $\triangle = 0$ எனில், $\triangle^1 = 0$ என்று கொள்கிறோம்.

$\triangle$-ன் எல்லா மூலகங்களும் பூச்சியமெனில், தெளிவாக $\triangle^1 = 0$

$\triangle$-ன் எல்லா மூலகங்களும் பூச்சியமில்லை எனில், குறைந்தது ஒரு மூலகமாவது பூச்சியமில்லாமலிருக்கும். அது, $b_1 \neq 0$ என்க. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளைக் கருதுக,

$$a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1 = \triangle = 0 \longrightarrow (1)$$
$$a_1A_2+b_1B_2+c_1C_3 = 0 \longrightarrow (2)$$
$$a_2A_3+b_1B_3+c_1C_3 = 0 \longrightarrow (3)$$

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$a_1(A_1 c_3 - C_1A_2) + b_1(B_1C_2 - B_2C_1) = 0 \longrightarrow (4)$$

மேலும் (2), (3) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$a^T(A_2C_3 - A_3C_2) + b_1 (B_2C_3 - B_3C_2) = 0 \longrightarrow (5)$$

a_1 ஐ (4), (5) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து நீக்கினால்,

$$b_1 [(B_1C_2 - B_2C_1)(A_2C_3 - A_3C_2) - (B_2C_3 - B_3C_2)(A_1C_2 - C_1A_2)] = 0$$

$$\text{i.e.;}\ b_1 [A_2B_1C_2C_3 - B_1A_3C_2^2 - B_2A_2C_1C_3 + B_2A_3C_1C_2 - B_2A_1C_2C_3 + B_2A_2C_3C_1 + B_3C_2^2A_1 - B_3C_1C_2A_2] = 0$$

$$\text{i.e.;}\ b_1 (-A_1B_2C_3 - B_1C_2A_3 - C_1A_2B_3 + A_3B_2C_1 + A_1B_3C_2 + A_2B_1C_3)\ C_2 = 0$$

இப்பொழுது $C_2 \neq 0$ எனில், பிறகு $\triangle^1 = 0$

$C_2 = 0$ எனில், பிறகு சமன்பாடு (2) ஆனது,

$$a_1A_2 + b_1B_2 = 0 \longrightarrow (6)$$

என்று சுருக்கப்படுகிறது.

இப்பொழுது (1), (3) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து a_1 ஐ நீக்கினால்,

$$a_1 (A_1C_3 - A_3C_1) + b_1 (B_1C_3 - B_3C_1) = 0 \longrightarrow (7)$$

இப்பொழுது, (6), (7) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$b_1 [B_2 (A_1C_3 - A_3C_1) - (B_1C_3 - B_3C_1) A_2] = 0$$

$$\text{i.e.;}\ b_1 (A_1B_2C_3 - A_2B_1C_3 + A_2B_3C_1 - A_3B_2C_1) = 0$$

$$\text{i.e.;}\ b_1 \triangle^1 = 0$$

$$\triangle^1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$ என்பதால், $\triangle^1 = C_3 (A_1B_2 - A_2B_1) + C_1 (A_2B_3 - A_3B_2)$

ஆனால், $b_1 \neq 0$, எனவே $\triangle^1 = 0$

எனவே, $\triangle = 0$ எனில் $\triangle^1$-ம் பூச்சியமாகிறது.

$\therefore\ \triangle^1 = \triangle^2$

குறிப்பு : பொதுவாக $(n \times n)$ தரத்தைப்பெற்ற அணிக் கோவைக்கு $\triangle^1 = \triangle^{n-1}$

மாதிரி :

$$\begin{vmatrix} a_2a_3 + b_1^2 & b_1b_2 - a_3b_3 & b_3b_1 - a_2b_2 \\ b_1b_2 - a_3b_3 & a_3a_1 - b_2^2 & b_2b_3 - a_1b_1 \\ b_3b_1 - a_2b_2 & b_2b_3 - a_1b_1 & a_1a_2 - b_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1a_2a_3 - a_1b_1^2 - a_2b_2^2 - a_3b_3^2)^2$$

என்பதை நிரூபிக்கவும்.

தெளிவாக, கொடுக்கப்பட்ட $\triangle^1$ என்ற அணிக்கோவை

யானது, $\begin{vmatrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{vmatrix} = \triangle$ என்ற அணிக்கோவையின் தலைகீழ் அணிக்கோவையாகும்.

இப்பொழுது,

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{vmatrix} = (a_1a_2a_3 - a_1b_1^2 - a_2b_2^2 - a_3b_3^2$$

எனவே, $\triangle^1 = \triangle^2$ என்ற வரையறையின்படி,

$$\triangle^1 = \begin{vmatrix} a_2a_3 - b_2^1 & b_1b_2 - a_3b_3 & b_3b_1 - a_2b_2 \\ b_1b_2 - a_3b_3 & a_3a_1 - b_2^2 & b_2b_3 - a_1b_1 \\ b_3b_1 - a_2b_2 & b_2b_3 - a_1b_1 & a_1a_2 - b_3^3 \end{vmatrix}$$

$$= \triangle^2 = (a_1a_2a_3 - a_1b_1^2 - a_2b_2^2 - a_3b_3^2)^2$$

சிலமாதிரிக் கணக்குகள்

1. $$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

என்பதை நிறுவுக.

முதல் நிரையுடன், இரண்டாம் நிரையையும், மூன்றும் நிரையையும் கூட்டினால்; அதாவது, $R_1 \sim R_1 + R_2 + R_3$ என்று செயல்படுத்தினால்,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

இரண்டாம் நிரலிலிருந்து முதல் நிரையைக் கழித்து, மூன்றும் நிரலிலிருந்து முதல் நிரையைக் கழித்து, செயலாற்றினால் ; அதாவது $C_2 \sim C_2 - C_1$, $C_3 \sim C_3 - C_1$ என்று செயல் படுத்தினால்,

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^3$$

2. $$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \end{vmatrix}$$ ஐ மதிப்பிடுக.

$C_1 \sim C_1 - 3\,C_3$, $C_2 \sim C_2 - 2\,C_3$, $C_4 \sim C_4 - 4\,C_3$ என்று செயல்படுத்தினால்,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 25 & 1 & 6 \\ 7 & 13 & 3 & 5 \\ 9 & 23 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 25 & 6 \\ 7 & 13 & 5 \\ 9 & 23 & 6 \end{vmatrix}$$

$R_1 \sim R_1 - R_3$, $R_3 \sim R_3 - R_2$ என்று செயல்படுத்தினால்,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 7 & 13 & 5 \\ 2 & 10 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)\,(7-10)$$

$$= 6$$

3. மதிப்பிடுக

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$$

கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கோவையை,

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$$ என்று எழுதலாம்.

இப்பொழுது நான்காம் நிரலிலிருந்து மூன்றும் நிரலைக் கழித்து, மூன்றும் நிரலிலிருந்து இரண்டாம் நிரலைக் கழித்து, இரண்டாம் நிரலிலிருந்து முதல் நிரலைக் கழித்துச் செயலாற்றினால் அதாவது, $c_4 \sim c_4 - c_3$, $c_3 \sim c_3 - c_2$, $c_2 \sim c_2 - c_1$ எனச் செயல்படுத்தினால்,

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \\ 16 & 9 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 0$ (கடைசி இரு நிரல்களும் ஒத்துள்ளன என்பதால்)

4. $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 24 & 24 & 16 \\ 5 & 13 & -3 \end{bmatrix}$ எனில், $|A| = |A^T|$ என்பதைக் காட்டுக.

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 24 & 24 & 16 \\ 5 & 13 & -3 \end{vmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 6 & 24 & 5 \\ 4 & 24 & 13 \\ 5 & 13 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|A^T| = \begin{vmatrix} 6 & 24 & 5 \\ 4 & 24 & 13 \\ 5 & 13 & -3 \end{vmatrix}$$

நிரைகளை நிரல்களாக அமைத்தால் ⟶ (∵ நிரைகளை நிரல்களாக மாற்றுவதால் அணிக்கோவையின் மதிப்பு மாறுவதில்லை),

$$|A^T| = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 24 & 24 & 13 \\ 5 & 13 & -3 \end{vmatrix} = |A|$$

5. $$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & bc+ad & b^2c^2+a^2d^2 \\ 1 & ca+bd & c^2a^2+b^2d^2 \\ 1 & ab+cd & a^2b^2+c^2d^2 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)$$

$(b-c) \times (b-d)(c-d)$ என்பதை நிரூபி.

$R_3 \sim R_3 - R_2, R_2 \sim R_2 - R_1$ என்று செயல்படுத்தினால்,

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & bc+ad & b^2c^2+a^2d^2 \\ 0 & (a-b)(c-d) & (a^2-b^2)(c^2-d^2) \\ 0 & (b-c)(a-d) & (b^2-c^2)(a^2-d^2) \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(c-d)(b-c)(a-d) \begin{vmatrix} 1 & (a+b)(c+d) \\ 1 & (b+c)(a+d) \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(c-d)(b-c)(a-d)\,[ab+ac+bd$$
$$+cd-ac-bc-ad-bd]$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

நி. வே. (Q. E. D.)

கீழ்க்காணும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காண்க.

$$\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\triangle = \begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

$R_1 \sim R_1 - R_2$ என்று செயல்படுத்தினால்,

$$\triangle = \begin{vmatrix} x-2 & -6+3x & -1-x+3 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-2 & 3(x-2) & -(x-2) \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$= (x-2) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x-2 \end{vmatrix} = 0$$

$R_3 \sim R_3 + R_1$, $R_2 \sim R_2 - 3R_1$ என்று செயல்படுத்தினால்,

$$\triangle = (x-2) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & -3x-6 & x-3+2 \\ -3 & 2x+9 & x+2-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$= (x-2) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & -3(x+2) & x-1 \\ -3 & 2x+9 & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$=(x-2)\ (x-1) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & -3(x+2) & 1 \\ -3 & 2x+9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$= (x-2)(x-1) \left\{ (-3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \right\} = 0$$

$$= (x-2)\ (x-1)\ \{ (-3)\ (2+3) \} = 0$$

$\Longrightarrow$ $x=2$, $x=1$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

6.
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^3\ (x+3)$$

என்பதை நிரூபி.

$R_1 \sim R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ என்று செயல்படுத்தினுல்,

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிக் கோவை,

$$= \begin{vmatrix} x+3 & 1 & 1 & 1 \\ x+3 & x & 1 & 1 \\ x+3 & 1 & x & 1 \\ x+3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

இதில் $C_2 \sim C_2 - C_1$, $C_3 \sim C_3 - C_1$, $C_4 \sim C_4 - C_1$ என்று செயல்படுத்தினுல்,

$$= (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+3 \; (x-1)^3,$$

7. $$\triangle = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1+a_4 \end{vmatrix} = 1+a_1+a_2+a_3+a_4$$

என்பதை நிருபி.

$\triangle$-ல் $C_1 \sim C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ என்று செயல்படுத்தினுல்,

$$\begin{vmatrix} 1+a_1+a_2+a_3+a_4 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1+a_1+a_2+a_3+a_4 & 1+a_2 & a_3 & a_4 \\ 1+a_1+a_2+a_3+a_4 & a_2 & 1+a_3 & a_4 \\ 1+a_1+a_2+a_3+a_4 & a_2 & a_3 & 1+a_4 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a_1+a_2+a_3+a_4) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 1+a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & a_2 & 1+a_3 & a_4 \\ 1 & a_2 & a_3 & 1+a_4 \end{vmatrix}$$

$R_2 \sim R_2 - R_1$, $R_3 \sim R_3 - R_1$, $R_4 \sim R_4 - R_1$, என்று செயல்படுத்தினால்,

$$\Delta = (1+a_1+a_2+a_3+a_4) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a_1+a_2+a_3+a_4) \times 1$$

$$= (1+a_1+a_2+a_3+a_4)$$

8. $$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & x \\ 5 & 6 & 7 & y \\ 6 & 7 & 8 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = (x-2y+z)^2$$ என்பதைக் காட்டுக.

$R_2 \sim R_1 - 2R_2 + R_3$ என்று கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கோவையில் செயல்படுத்தினால்,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x-2y+z \\ 5 & 6 & 7 & y \\ 6 & 7 & 8 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(x-2y+z) \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$C_2 \sim C_1 - 2C_2 + C_3$ என்று செயல்படுத்த,

$$\Delta = -(x-2y+z) \begin{vmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & 8 \\ x-2y+z & y & z \end{vmatrix}$$

$$= -(x-2y+z)^2 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2y+z)^2.$$

9. $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+cda \\ 1 & c & c^2 & c^3+dab \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{vmatrix} = 0$$ என்பதை நிறுவி.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & cda \\ 1 & c & c^2 & dab \\ 1 & d & d^2 & abc \end{vmatrix}$$

என்று எழுதலாம். $= \Delta_1 + \Delta_2$

$$\Delta_1 = \frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} abcd & a & a^2 & a^3 \\ abcd & b & a^2 & b^3 \\ abcd & c & c^2 & c^3 \\ abcd & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{abcd}{abcd}\begin{vmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ cda & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & cda \\ 1 & c & c^2 & adb \\ 1 & d & d^2 & adc \end{vmatrix} = -\Delta_2$$

$\therefore \quad \Delta_1 + \Delta_2 = 0$ அல்லது $\Delta = 0$

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

எனில், $|A|\ |B| = |AB|$ என்பதை நிரூபி.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ எனில், $|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

இப்பொழுது,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 24 & 24 & 16 \\ 5 & 13 & -3 \end{bmatrix}$$

பிறகு, $|48| = 16 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & 13 & -3 \end{vmatrix}$

$$|A|\ |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 24 & 24 & 16 \\ 5 & 13 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= 16 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & 13 & -3 \end{vmatrix}$$

எனவே, $|AB| = |A|\ |B|$. (நி. வே.)

11. W என்பது, ஒருமையின் (Unity) முப்படித் தீர்வுகளில் (Cube root) ஒன்றெனில்,

$$\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ w & w^2 & w^3 & 1 \\ w^2 & w^3 & 1 & w \\ w^3 & 1 & w & w^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

w என்பது, ஒருமையின் முப்படித் தீர்வு என்பதால்,

$$w^3 = 1, \quad w^2 + w + 1 = 0, \quad w^4 + w^2 + 1 = 0.$$

இப்போது,

$$\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ w & w^2 & w^3 & 1 \\ w^2 & w^3 & 1 & w \\ w^3 & 1 & w & w^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ w & w^2 & 1 & 1 \\ w^2 & 1 & 1 & w \\ 1 & 1 & w & w^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & w & w^2 & 1 \\ w & w^2 & 1 & 1 \\ w^2 & 1 & 1 & w \\ 1 & 1 & w & w^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+w^2+w^4+1 & w+w^8+w^2+1 & w^2+w+w^2+w & 1+w+w^3+w^2 \\ w+w^8+w^2+1 & w^2+w^4+1+1 & w^8+w^2+1+w & w+w^2+w+w^2 \\ w^2+w+w^8+w & w^8+w^2+w+1 & w^2+1+w+w^2 & w^2+1+w+w^8 \\ 1+w^2+w^2+w^8 & w+w^2+w+w^2 & w^2+1+w+w^8 & 1+1+w+w^4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

12. $\triangle = \begin{vmatrix} 6^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$ -ஐ ஓர் அணிக் கோவையின் வர்க்கமாக (square) அமைத்து, அதன் மதிப்பைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிக்கோவையின் b^2+c^2 என்ற முதல் நிரை, முதல் நிரலின் மூலகம் $0^2+c^2+b^2 = 0{\cdot}0+c{\cdot}c+b{\cdot}b$ என்றெழுதலாம். அதாவது, ஓர் அணிக்கோவையில் அமைந்துள்ள o, c, b என்ற முதல் நிரையில் மூலகங்களை மற்றோர் அணியில் இருக்கும் o, c, b என்ற முதல் நிரலின் மூலகங்களின் மூலகங்களோடு பெருக்கப்பட்ட அமைப்பாகக் காணப்படுகிறது. எனவே, பட்டறிமுறை (trial and error method) மூலம்,

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = (2abc)(2abc) = 4a^2b^2c^2$$

13. a, b, c, d, e, f ஆகியவை விகிதமுறு எண்கள் (rational numbers) எனில், பிறகு,

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$ என்ற அணிக்கோவை

யானது, ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் வர்க்கமாகும் என்பதைக் காட்டுக.

$f \neq 0$ எனில், இரண்டாம் நிரலை, f ஆல் பெருக்கி, அணிக் கோவையை f ஆல் வகுத்தால்,

கொடுக்கபட்டுள்ள அணிக்கோவை $= \frac{1}{f}\begin{vmatrix} 0 & af & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -df & 0 & f \\ -c & -ef & -f & 0 \end{vmatrix}$

$C_2 \sim C_2 - e,\ c_3 + d,\ c_4$ என்று செயல்படுத்திஞல்,

$$= \frac{1}{f}\begin{vmatrix} 0 & af - be + cd & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & 0 & 0 & f \\ -c & 0 & -f & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-(af - be + cd)}{f}\begin{vmatrix} -a & d & e \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{+(af - be + cd)}{f^2}\begin{vmatrix} af & d & e \\ bf & 0 & f \\ cf & -f & 0 \end{vmatrix}$$

$C_1 \sim C_1 + c\,C_2 - b,\ c_3$ என்று செயல்படுத்திஞல்,

$$= \frac{(af - be + cd)}{f^2}\begin{vmatrix} af - be + cd & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & -f & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(af - be + cd)^2}{f^2}\ f^2 = (af - be + cd)^2$$

a, b, c, d, e, f ஆகியவை விகிதமுறு எண்களென்பதால், $(af - be + cd)$-ம் விகிதமுறு எண்ணுகிறது. (நி.வே).

14. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ \cos a\,\theta & \cos\ (a+1)\,\theta & \cos\,(a+2)\theta \\ \sin a\,\theta & \sin\ (a+1)\,\theta & \sin\ (a+2)\theta \end{vmatrix} = (1-2x$

$\cos\theta + x^2)\sin\theta$ என்பதை நிறுவுக.

$C_1 \sim C_1 + C_3 - 2x\ \cos\theta\ C_2$ என்று செயல்படுத்திஞல்,

$$= \begin{vmatrix} 1+x^2 - 2x\cos\theta & x & x^2 \\ 0 & \cos\,(a+1)\,\theta & \cos\ (a+2)\,\theta \\ 0 & \sin\,(a+1)\,\theta & \sin\ (a+2)\,\theta \end{vmatrix}$$

$= (1-2x\cos\theta + x^2)\,[\sin(a+2)\theta\cos(a+1)\theta - \sin(a+1)\theta$
$\cos(a+2)\theta]$

$= (1 - 2x\cos\theta + x^2)\sin\theta$

பயிற்சி 2

1. $\triangle = \begin{vmatrix} 365 & 240 & 219 \\ 240 & 225 & 198 \\ 219 & 198 & 181 \end{vmatrix}$-ன் மதிப்பு என்ன?

2. $\triangle = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 9 & 6 \\ 8 & 6 & 5 & 8 \\ 7 & 10 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் அணிக்கோவையின்

மதிப்பைக் காண்க.

4. $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = -(ac-b^2)(ax^2-2b$

$xy+cy^2)$ என்பதை நிரூபி.

5. $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

என்பதை நிரூபி.

6. $a+b+c=0$ என்று கொடுக்கப்பட்டால்,

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

7. $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (y-z)(z-x)(x-y)(yz+zx+xy)$$

என்பதை நிரூபி.

8. $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)$$

$(z-x)(xy+yz+zx)$ என்பதை நிரூபி.

9. $$\begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ x-4 & 2x-9 & 3x-16 \\ x-8 & 2x-27 & 3x-64 \end{vmatrix} = 0$$ என்ற சமன்பாட்டைத்

தீர்க்கவும்.

10. $$\triangle = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

$$= abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

என்பதை நிரூபி.

11. $$\triangle = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2\,abc\,(a+b+c)^3$$

என்பதை நிரூபி.

12. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 3 & 20 \end{bmatrix}$$

எனில்,

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$ என்பதை நிரூபி.

13. கீழ்க்காணும் அணிக்கோவையை இரு அணிக்கோவையின் பெருக்கல்களாக அமைக்கவும்.

$$\triangle = \begin{vmatrix} (a-x)^2 & (b-x)^2 & (c-x)^2 \\ (a-y)^2 & (b-y)^2 & (c-y)^2 \\ (a-z)^2 & (b-z)^3 & (c-z)^2 \end{vmatrix}$$

14.
$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+a^2 & 2ax+xy & 2ay+x^2 \\ 2ax+xy & a^2+2x^2 & 2ax+xy \\ 2ay+x^2 & 2ax+xy & x^2+y^2+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2-x^2 & xy-ax & x^2-ay \\ xy-ax & a^2-y^2 & xy-ax \\ x^2-ay & xy-ax & a^2-x^2 \end{vmatrix}$$ என்பதை நிரூபி.

15.
$$\begin{vmatrix} (1+ax)^2 & (1+ay)^2 & (1+az)^2 \\ (1+b)^2 & (1+by)^2 & (1+bz)^2 \\ (1+cx)^2 & (1+cy)^2 & (1+cz)^2 \end{vmatrix}$$ என்ற அணிக்கோவையை இரு அணிக்கோவைகளின் பெருக்கல்களாக அமைக்கவும்.

16.
$$\begin{vmatrix} (a-b-c) & 2a & 2a \\ 2b & (b-c-a) & 2b \\ 2c & 2c & (c-a-b) \end{vmatrix}$$ என்ற அணிக்கோவை சரியான முப்படி என்று நிறுவுக.

17. $f\ (x)$ என்பது, x ன் இருபடி சார்வு எனில்,

$$\frac{f\ (x)}{(x-a)\ (x-b)\ (x-c)} = \begin{vmatrix} \dfrac{f\ (x)}{x-a} & \dfrac{f\ (b)}{x-b} & \dfrac{f\ (c)}{x-c} \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

என்பதை நிரூபி.

18. $S_r = a^r + b^r + c^r + d^r$ எனில்,

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix}$$

$= (a-b)^2 (a-c)^2 (a-d)^2 \ (b-c)^2 \ (b-d)^2 \ (c-d)^2$ என்பதை நிரூபி.

19. $$\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-id \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha-i\beta & r-i\partial \\ -r-i\partial & \alpha-\beta i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & C-iD \\ -C-iD & A+iB \end{vmatrix}$$

என்று காண்க.

20. $$\begin{vmatrix} yz-x^2 & zx-y^2 & xy-z^2 \\ zx-y^2 & xy-z^2 & yz-x^2 \\ xy-z^2 & yz-x^2 & zx-y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r^2 & u^2 & u^2 \\ u^2 & r^3 & u^2 \\ u^2 & u^2 & r^2 \end{vmatrix}$$

என்பதை நிரூபி, இதில் $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $u^2 = ry + yz + zx$:

21- வேண்டர் மாண்டேயின் (Vander Monde's) அணிக் கோவை,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots\dots 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots\dots d_n \\ d_1^2 & d_2^2 & d_3^2 & \dots\dots d_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots\dots \\ d_1^{n-1} & d_2^{n-1} & d_3^{n-1} & \dots\dots d_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (d_i - d_j)$$

என்பதை நிரூபி.

22. $$\begin{vmatrix} 3 & a+b+c & a^2+b^2+c^2 \\ a+b+c & a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 \\ a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 & a^4+b^4+c^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}^2 .$$

$$= (b-c)^2 (c-a)^2 (a-b^2)$$

என்பதை நிறுவுக.

23. $ax + by + cz = 1,\ bx + cy + az = 0 = cx + ay + bz$ எனில்,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = 1$$ என்பதை நிறுவுக.

24. $$\begin{vmatrix} a^2+\lambda^2 & ab+c\lambda & ca-b\lambda \\ ab-c\lambda & b^2+\lambda^2 & bc+a\lambda \\ ca+b\lambda & bc-a\lambda & c^2+\lambda^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda & c & -b \\ -c & \lambda & a \\ b & -a & \lambda \end{vmatrix}$$

$= \lambda^3 (\lambda^2+a^2+b^2+c^2)^3$ என்பதை நிறுவுக.

25. $$\begin{vmatrix} ax-by-cz & ay+bx & az+cx \\ bx+ay & by-cz-ax & bz+cy \\ cx+az & cy+bz & cz-ax-by \end{vmatrix}$$

$= (a^2+b^2+c^2)\ (ax+by+cz)\ (x^2+y^2+z^2)$ என்பதை நிறுவுக.

3. அணியின் மதிப்பிடம்

(Rank of a Matrix)

3-A ஓர் அணியின் சிற்றணிக்கோவைகள்—தலையாய, பிரதான சிற்றணிக்கோவைகள் (Minors of a matrix – Principal and heading minors)

வரையறை : A என்ற ஓர் அணியிலிருந்து r நிரைகளையும், r நிரல்களையும் வைத்துக்கொண்டு மற்றவற்றைப் புறக்கணித்தால், $r \times r$ தரத்தைப் பெற்ற அவ் வணியின் அணிக்கோவைக்கு (determinant) A-ன் சிற்றணிக்கோவை என்று பெயர். மேலும், கீழ் அணிகள் (sub-matrices) அவ் வணியின் தலையாய அல்லது பிரதான இடத்தில் அமைந்திருந்து அவற்றை அணிக்கோவைகளாகக் கருதினுல், அவை தலையாய அல்லது பிரதான சிற்றணிக்கோவைகள் என்று கூறுகிறோம்.

3-B ஓர் அணியின் மதிப்பிடம் (Rank of a Matrix)

வரையறை : $m \times n$ என்ற தரத்தைப் பெற்ற $A = [a_{ij}]$ என்ற அணியைக் கருதுக. $(r+1)$ தரத்தைப் பெற்ற எல்லாச் சிற்றணிக்கோவைகளும் பூச்சியமாயிருந்து, குறைந்தது r என்ற தரத்தைப் பெற்ற ஓர் அணிக்கோவையாவது பூச்சியமில்லாமலிருந்தால், அணி A-ன் மதிப்பிடம் r ஆகும். இதனை $P(A) = r$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

$(r+2)$ தரத்தைப் பெற்ற ஒவ்வொரு சிற்றணிக்கோவையானது $(r+1)$ தரத்தைப் பெற்ற சிற்றணிக்கோவைகளின் பெருக்கல்களின் கூட்டல் என்பதால் மறைகிறது (vanishes). சிறப்பாக, $(r+1)$ தரத்தைப் பெற்ற சிற்றணிக்கோவைகள் பூச்சியமாவதால், rஐவிடப் பெரிய தரத்தைப் பெற்ற சிற்றணிக்கோவைகள் மறைகின்றன.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad m < n \text{ என்க,}$$

இதிலிருந்து $m \times m$ என்ற உயர் தரத்தைப் (higher order) பெற்ற ஒரு சதுரக் கீழ்அணியை (square sub-matrix) அமைக்கலாம். இந்த எல்லாச் சதுரக் கீழ்அணிகளின் அணிக்கோவைகளின் மதிப்புப்

பூச்சியமெனில் அணி A-ன் மதிப்பிடம் m அன்று. இப்பொழுது அடுத்த குறைந்த தரமான $(m-1) \times (m-1)$ஐப் பெற்ற சதுரக் கீழ்அணியைக் கருதி, அதிலுள்ளகீழ் அணிகளின் (sub-matrices) அணிக்கோவை மதிப்புப் பூச்சியமில்லை எனில், அணி A-ன் மதிப்பிடம் $(m-1)$ ஆகும்.

கீழுள்ள நிபந்தனைகள் உண்மையானல், கொடுக்கப்பட்ட A என்ற அணியின் மதிப்பிடம் r ஆகும். அதாவது, $P(A)=r$

(i) $(r+1)$ என்ற தரத்திற்கும் (order) அதற்கும் மேற்பட்ட உயர்நிலைத் தரங்களைக் கொண்ட சதுரக் கீழ்அணிகள் (square sub-matrices) சிறப்பு அணிகளாக (singular matrices) இருக்கவேண்டும்.

(ii) குறைந்தது r தரத்தைப் (order) பெற்ற ஒரு சதுரக் கீழ் அணி சிறப்பற்ற அணியாக (non singular matrix) இருக்கவேண்டும்.

குறிப்பு :

1. ஓர் அணியின் எல்லா மூலகங்களும் பூச்சியமெனில், அவ்வணியின் மதிப்பிடம் பூச்சியமாகும்.

2. ஒரு $n \times n$ தரத்தைப்பெற்ற சிறப்பற்ற அணியின் மதிப்பிடம் n ஆகும்.

3-C சிறப்பு அணியும் சிறப்பற்ற அணியும் (Singular and Non-singular)

வரையறை : A என்ற சதுர அணியின் அணிக்கோவையின் மதிப்புப் பூச்சியம் எனில், அவ்வணியைச் சிறப்பு அணி (singular matrix) என்கிறோம். அதாவது, $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ அணி எனில், இவ் வணியின் அணிக் கோவையான $|A| = |[a_{ij}]| = 0 \iff A = [a_{ij}]$ சிறப்பு அணியாகும் (singular matrix).

ஒரு சதுர அணியின் அணிக்கோவையின் மதிப்புப் பூச்சியமில்லை யெனின், அவ் வணியைச் சிறப்பற்ற அணி (non singular matrix) என்கிறோம்.

அதாவது, $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ எனின்,

$$|A| = |[a_{ij}]| \neq 0 \iff A = [a_{ij}] \text{ சிறப்பற்ற அணியாகும்.}$$

மாதிரி 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

அணி A-ன் உயர்நிலை சதுரக் கீழ்அணி 3×3 தரத்தைப் பெற்றுள்ளது அவ்விதமான மொத்த அணிகள் $= \binom{4}{3} = 4$

அவை,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ ஆகும்}$$

இவற்றில்,

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4(0-4) - 2(6+0-8) + 1(6-6) = 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 4(21-7) - 2(42-14) + 3(6-6) = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 4(28-0) - 1(42-14) + 3(-8)$$

$$= 112 - 28 - 24 = 60 \neq 0$$

$|A_3|$ என்ற 3×3 தரத்தைப்பெற்ற சிற்றணிக்கோவை பூச்சியமில்லை என்பதால், கொடுக்கப்பட்ட அணியின் மதிப்பிடம் 3 ஆகும்.

அதாவது, $P(A) = 3$

மாதிரி 2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

A-ன் உயர்நிலை சதுரக் கீழ்அணியின் தரம் 3×3 ஆகும்.

இவ் வகையான அணிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $\binom{4}{3} = 4$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ |A_1| = 0$$

தெளிவாக 3×3 தரத்தைப் பெற்ற எல்லாக் கீழ்அணிகளின் அணிக் கோவைகளின் மதிப்புப் பூச்சிமாயிருக்கிறது. ஏனெனில், மூன்றும் நிரையின் மூலகங்கள் பூச்சியமாகும்.

இப்பொழுது அடுத்த கீழ்நிலை சதுரக் கீழ்அணிகளைக் கருதினல்,

$$B_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \ |B_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

எனவே, A அணியின் மதிப்பிடம் = 2 ஆகும். அதாவது, P (A) = 2

3-D மூலைவிட்ட ஒடுக்கம் (Diagonal reduction)

$m \times n$ தரத்தைப் பெற்ற அணியான A-ன் மதிப்பிடம் r என்க. பிறகு $m \times m$ தரத்தைப் பெற்ற B, C என்ற சிறப்பற்ற சதுர அணிகள்,

$$BAC = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ .... } (3\cdot1)$$ என்றிருக்குமாறு

அமைந்திருக்கும். இதில் I_r என்பது, r தரத்தைப் பெற்ற அலகு அணி (unit matrix) ஆகும். மற்ற மூலகங்கள் பூச்சியமாகும்.

3-E மதிப்பிடத்திற்குக் காரணிப்படுத்தல் (Rank factorisation)

(3-1)-லிருந்து ($m \times n$) தரத்தையும், r என்ற மதிப்பிடத்தையும் பெற்ற அணியான A-ஐக் காண முடியும்.

$$A = B^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C^{-1}$$

$$= B_1 C_1 \text{ .... } (3\cdot2)$$

இதில், B_1 C_1 ஆகியவைகள், r என்ற மதிப்பிடத்தைப் பெற்று ($m \times r$, $r \times n$) தரங்களை முறையே பெற்ற அணிகளாகும்.

3-F சுய அடுக்கு அணி (Idempotent matrix)

A என்ற சதுர அணியைக் கருதி, $A^2 = A$ என்றிருந்தால், அவ் வணியைச் சுயஅடுக்கு அணி (Idempotent matrix) என்கிறோம். உதாரணமாக,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A.\,A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = A$$

தேற்றம் : *சுய அடுக்கு அணியின் மதிப்பிடம், அவ் வணியின் பிரதிக்கு (trace) (மூலைவிட்ட மூலகங்களின் கூட்டல்) சமம்.*

நிரூபணம்: (3.2)-ல் உள்ள A-ன் மதிப்பிடத்திற்குக் காரணிப் படுத்தல் (rank factorisation) $= B_1\,C_1$ ஐக் கருதுக.

பிறகு, $A^2 = A = B_1C_1 \quad B_1C_1 = B_1C_1$

ஆனால், B_1 ஆனது, L என்ற இடது நேர்மாற்றத்தைப் (left inverse) பெற்றுள்ளது. இதேபோன்று, C_1 ஆனது, R என்ற வலது நேர்மாற்றத்தைப் (right inverse) பெற்றுள்ளது.

பிறகு, $L\, B_1C_1B_1C_1R = L\, B_1C_1\, R \Longrightarrow C_1\, B_1 = I_r$

பிரதி A = பிரதி B_1C_1 = பிரதி C_1B_1 = பிரதி $I_r = r = P(A)$

நி.வே.).

குறிப்பு : (i) $A^2 = A \Longleftrightarrow P(A) + P(I-A) = m$ (A ன் தரமாகும்).

(ii) $A_i \quad i = 1, 2, \ldots\ldots k$ என்பது m தரத்தைப் (order) பெற்ற சதுர அணிகளென்றும், $A = A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_k$ என்றும் கொள்க. கீழ்க்காணும் கூற்றுகளையும் (statements) கருதுக.

(a) $A_i^2 = A_i \;\forall\; i$

(b) $A_i\, A_j = 0 \;\forall\; i \neq j,\; P(A_i^2) = P(A_i) \;\forall\; i$

(c) $A^2 = A$

(d) $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots\cdots + P(A_k)$

(a), (b), (c) ஆகியவற்றில், எந்த இரண்டு கூற்றும் மேலுள்ள நான்கு கூற்றுகளைக் குறிப்பிடுகின்றன.

(a) ம், (b)-ம் $\Longrightarrow$ (c) என்பதை அறிக.

சுய அடுக்கு அணியின் மதிப்பிடம் அவ் வணியின் பிரதிக்குச் சமம் என்பதால், (a) ம், (c)-ம் $\Longrightarrow$ (d)

எனவே, (a)-ம், (b)-ம் $\Longrightarrow$ (c)-ம் (d)-ம்

இப்பொழுது, (b)-ம், (c)-ம் $\Longrightarrow$ (a) என்பதை நிரூபிப்போம்.

(b)-ம், (c)-ம் $\Longrightarrow A_i^2 = A\,A_i = A^2\,A_i = A_i^3$ $\Longrightarrow A_i^2\,(I - A_i) = 0$

மேலும், $P(A_i) = P(A_i^2) \Longrightarrow A_i = D\,A_i^2$ (ஏதோ ஒரு D-க்கு)

எனவே, $A_i^2\,(I - A_i) = 0 \Longrightarrow A_i\,(I - A_i) = 0$

ஆனால், முன்பே (a)-ம், (b)-ம் $\Longrightarrow$ (c)-ம், (d)-ம் என்பதை நிரூபித்தோம்.

எனவே, (b)-ம், (c)-ம். $\Longrightarrow$ (a)-ம், (d)-ம்.

இப்பொழுது, (c)-ம், (d)-ம் $\Longrightarrow$ (a)-ம், (b)-ம் என்பதை நிரூபிப்போம்.

$A_0 = I - A$ என்று வரையறுப்போம்.

(c)-ம், (d)-ம் $\Longrightarrow A_0 + A_1 + \ldots\ldots + A_k = I$ என்பதைக் கவனிக்கவும். மேலும், $P(A_0) + P(A_1) + \ldots\ldots + P(A_k) = m$

மேலும், $P\,(I - A_i) = P\,(\Sigma A_i - A_i) \leqslant \Sigma\,P\,(A_i) - P(A_i)$ $= m - P(A_i)$

எனினும், $P(A_i) + P(I - A_i) \geqslant m$

எனவே, $P(A_i) + P(I - A_i) = m$

குறிப்பு: (ii)-லுள்ள முடிவைப் பயன்படுத்தினால், $A_i^2 = A_i\ \forall\ i$ இதேபோன்று, $(A_i + A_j)^2 = A_i + A_j$

பிறகு, $(A_i + A_j)^2 = A_i + A_j,\ A_i^2 = A_i,\ A_j^2 = A_j$

$\Longrightarrow A_i\,A_j + A_j\,A_i = 0$

$\Longrightarrow (A_iA_j + A_jA_i)\,A_j = A_iA_j + A_jA_iA_j = 0 \quad \ldots(3.3)$

$\Longrightarrow A_j\,(A_iA_j + A_jA_iA_j) = 2A_jA_iA_j = 0 \quad \ldots(3{\cdot}4)$

(3·3) ஐயும், (3·4) ஐயும் பயன்படுத்தினால்,

$A_i A_j = 0 \ \forall \ i \neq j$ என்று கிடைக்கிறது.

இந்த முடிவுகளின் காரணகர்த்தா காட்ரி (Khatri, 1968) என்பவராவர்.

3-G ஏறுபடி அணிவடிவம் (Echelon form of matrix):

ஓர் அணியில்,

(i) பூச்சியமற்ற நிரைகளிருக்குமானால், அவையனைத்தும் பூச்சிய நிரைகளுக்கு முந்தி (precede) இருந்து,

(ii) ஒரு நிரையில் முதல் பூச்சியமற்ற மூலகத்தை முந்தின பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை, அதற்கு அடுத்துவரும் அவ்விதமான பூச்சிய எண்ணிக்கையைவிடக் குறைந்திருந்து,

(iii) ஒவ்வொரு பூச்சியமற்ற நிரையின் முதல் பூச்சியமற்ற மூலகம் ஒருமையாக (unity) இருந்தால், அவ் வணியை ஏறுபடி அணி வடிவம் பெற்ற அணி என்கிறோம்.

கவனிக்கவும் : ஏறுபடி அணி வடிவத்திலுள்ள அணியின் மதிப்பிடம் (rank) அவ் வணியிலுள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கையாகும்.

மாதிரி :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ இதில்,

(i) முதல் மூன்று பூச்சியமற்ற நிரைகள், பூச்சிய நிரையான நான்காம் நிரையை முந்தி அமைந்துள்ளன.

(ii) நிரைகள் R_4, R_3, R_2 ஆகியவற்றிலுள்ள பூச்சிய மூலகங்களின் எண்ணிக்கை முறையே 5, 2, 1 ஆகும். இவை இறங்கு வரிசையிலமைந்துள்ளன.

(iii) ஒவ்வொரு பூச்சியமற்ற நிரையிலும் முதல் பூச்சியமற்ற மூலகம் ஒருமை (unity) ஆகும்.

எனவே, ஓர் அணியின் ஏறுபடி வடிவத்திற்கான நிபந்தனைகள் பூர்த்தி செய்யப்படுவதால், கொடுக்கப்பட்ட அணி A ஆனது ஏறுபடி அணி வடிவத்தில் அமைந்துள்ளது என்று காண்கிறோம். மேலும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணியில் மூன்று பூச்சியமற்ற நிரைகளுள்ளன. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட A அணியின் மதிப்பிடம்

P (A) = 3. இந்த அணியில் சிற்றணிக்கோவையின் உயர்நிலை 4 × 4 தரத்தைப் பெற்றுள்ளது.

அதாவது,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

இதேபோல், மற்ற 4 × 4 சிற்றணிக் கோவைகளின் மதிப்பும் பூச்சியமாக உள்ளது (நான்காம் நிரையிலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் பூச்சியமாகும் என்பதால்). இப்பொழுது, 3 × 3 தரத்தைப் பெற்ற சிற்றணிக்கோவை,

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட அணியின் மதிப்பிடம் 3 ஆகும்.

மாதிரி: கீழ்க்காணும் அணியின் மதிப்பிடத்தைக் (rank) காண்க.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

இதில்,

(i) முதல் இரண்டு பூச்சியமற்ற நிரைகள், பூச்சிய நிரையான மூன்றும் நிரையை முந்தி அமைந்துள்ளன.

(ii) நிரைகள் R_3 R_2 R_1 ஆகிய நிரைகளிலுள்ள பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை முறையே 4, 2 , 1 ஆகும். இவை இறங்கு வரிசையில் அமைந்துள்ளன.

(iii) ஒவ்வொரு பூச்சியமற்ற நிரையிலும் முதல் பூச்சியமற்ற மூலகம் ஒருமையாகும். எனவே, ஓர் அணியின் வடிவத்திற்கான நிபந்தனைகள் பூர்த்தி செய்யப்படுகின்றன. இவ் வணியில் இரண்டு பூச்சியமற்ற நிரைகள் இருப்பதால், இவ் வணியின் மதிப்பிடம் 2 ஆகும்.

தேற்றம் : A^T என்ற திருப்பு அணியின் மதிப்பிடம் A என்ற அணியின் மதிப்பிடத்திற்குச் சமம். அதாவது, $P(A^T) = P(A)$.

நிரூபணம் : $A = [a_{ij}]_{m \times n} \Longrightarrow A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$

A-ன் மதிப்பிடம் r என்க.

R என்பது, A-ன் r நிரைகளைக்கொண்ட சதுரக் கீழ்அணியாக, $|R| \neq 0$ என்றவாறு கொள்க.

தெளிவாக, R^T என்பது, A^T-ன் சதுரக் கீழ்அணியாகும்.

$$\therefore \; |R^T| = |R| \neq 0$$

எனவே, A^T-ன் மதிப்பிடம் $\geqslant r$

$a(r+1)$ நிரைகளைப் பெற்ற சதுரக் கீழ்அணியான Sஐ அணி A அடக்கியிருந்தால், வரையறைப்படி $|S| = 0$. மேலும் S ஆனது, S^T-க்கு A^T-ல் பொருந்தி உள்ளமையால், $(i.e)$ S^T என்பது, $(r+1)$ நிரைகளைப் பெற்ற A^T-ன் சதுரக் கீழ்அணி ஆதலால், $|S^T| = |S| = 0$. எனவே, A^T $(r+1)$ நிரைகளைக் கொண்ட சதுரக் கீழ்அணியைப் பூச்சியமற்ற அணிக்கோவையோடு அடக்கி இருக்காது. எனவே, $\Gamma(A^T) \geqslant r$ என்று தெரிகிறது.

ஆனால், மேலே நிறுவியபடி $P(A^T) \not> r$. $\therefore$ $P(A^T) = r = P(A)$.

மாதிரி : A ஆனது, பூச்சியமற்ற நிரல் அணியாகவும் B ஆனது, பூச்சியமற்ற நிரை அணியாகவும் இருந்தால், $P(AB) = 1$ என்பதை நிரூபி.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \qquad B = [b_{11} \; b_{12} \ldots\ldots\ldots \; b_{1n}]$$

என்ற பூச்சியமற்ற நிரல், நிரை அணிகளைக் கருதுக.

பிறகு,

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}\, b_{11} & a_{11}\, b_{12} & \ldots\ldots & a_{11}\, b_{1n} \\ a_{21}\, b_{11} & c_{21}\, b_{12} & \ldots\ldots & a_{21}\, b_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \text{-------} & & & \\ a_{m1}\, b_{11} & a_{m1}\, b_{12} & \ldots\ldots & a_{m1}\, b_{1n} \end{bmatrix}$$

A-ம், B-ம் பூச்சியமற்ற அணிகளென்பதால், AB-ம் பூச்சியமற்ற அணியாகிறது.

A. B ஆகிய அணிகளின் முறையான பூச்சியமற்ற மூலகங்களைப் பெருக்குவதால், அணி AB குறைந்தது ஒரு பூச்சியமற்ற மூலகத்தையாவது பெற்றிருக்கவேண்டும். A-ன் இரண்டு நிரைகளைப் பெற்ற எல்லாச் சிற்றணிக் கோவைகள் மறைகின்றன. ஆனால், A பூச்சியமற்ற அணியாகும். எனவே, P(AB) = 1.

3-H அணியின் தொடக்கத்திற்குரிய உருவ மாற்றங்கள் (Elementary Transformations of a Matrix)

தொடக்கத்திற்குரிய உருவமாற்றம் என்பது, ஓர் அணியின் தரத்தையோ, அல்லது மதிப்பிடத்தையோ மாற்றுவதில்லை. இதைத் தவிர, கீழ்க்காணும் மூன்று வகைகளில் ஏதாவதொரு உருவமாற்றத்தால் ஓர் அணி எவ்வித உருவ மாற்றமும் அடைவதில்லை.

(i) ஏதோ இரு நிரைகளை (நிரல்களை) மாற்றியமைப்பதால்,

(ii) பூச்சியமில்லாத ஓர் எண்ணை ஏதாவதொரு நிரையின் (நிரலின்) மூலகங்களுடன் பெருக்குவதால்,

(iii) ஒரு நிரையின் நிரலின் மூலகங்களை ஏதாவதொரு நிரையின் (நிரலின்) முறையான மூலகங்களைப் பூச்சியமற்ற எண்ணால் பெருக்கியபின், அதனுடன் முறையாகக் கூட்டுவதால், இவ் உருவ மாற்றங்களை நிரைகளுக்குச் செயல்படுத்தினால் அதனை நிரை உருவமாற்றம் (row transformation) என்றும், நிரல்களுக்குச் செயல்படுத்தினால் அதனை நிரல் உருவமாற்றம் (column transformation) என்றும் கூறுகிறோம்.

மேற்சொன்ன உருவமாற்றங்களுக்குக் குறியீடுகள் (Symbols)

(i) iஆம், jஆம் நிரைகளை மாற்றியமைத்தால், அதனை R_{ij} என்றும், iஆம், jஆம் நிரல்களை மாற்றியமைத்தால் அதனை C_{ij} என்றும் குறிப்பிடுகிறோம்.

(ii) iஆம் நிரையின் ஒவ்வொரு மூலகத்துடனும் a என்ற பூச்சியமற்ற திசையிலியால் பெருக்கினால், ${}_aR_i$ என்றும், iஆம் நிரலின் ஒவ்வொரு மூலகங்களுடனும் a என்ற பூச்சியமற்ற திசையிலியால் பெருக்கினால் அதனை ${}_aR_i$ என்றும்குறிப்பிடுகிறோம்.

(iii) jஆம் நிரையை c தடவை பெருக்கி, iஆம் நிரையோடு கூட்டினால் அதனை R_i+cR_j என்றும் jஆம் நிரலை c தடவை பெருக்கி iஆம் நிரலோடு கூட்டினால் அதனை C_i+C_j என்றும் குறிப்பிடுகிறோம்.

3-1 சமமாற்று அணி (Equivalent Matrix)

$m \times n$ தரத்தைப்பெற்ற A அணியிலிருந்து முடிவுள்ள தொடக்கத்திற்குரிய (elementary) நிரை (நிரல்) மாற்றங்களினுல் $m \times n$ தரத்தைப்பெற்ற B அணியைப் பெற்றுல் Bஐ A-க்குச் சமமானது என்று கூறுகிறேும். இதனே, $B \sim A$ எனக் குறிப்பிடு கிறேும். நிரைகளுக்கான மாற்றங்கள் எனின், இதனே $B \overset{R}{\sim} A$ என்றும், நிரல்களுக்கான செய்கைகள் எனின், இதனே, $B \overset{C}{\sim} A$ என்றும் குறிப்பிடுகிறேும்.

குறிப்பு: A, B ஆகிய இரு அணிகள் சமமாற்று அணி களென்றுல், CAD = B என்றிருக்குமாறு C, D ஆகிய சிறப்பற்ற அணிகள் நிலேத்திருக்கும்.

உதாரணமாக,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \sim B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ எனின்,}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

அதாவது, CAD = B.

தொடக்க அணி (Elementary matrix) : ஓர் அலகு அணி யிலிருந்து ஏதாவதொரு தொடக்க நிரை (நிரல்) உருவமாற்றங் களைச் செய்தால் கிடைக்கும் அணிக்குத் தொடக்க நிரை (நிரல்) அணி என்று கூறிகிறேும்.

குறிப்பு: ஒரு தொடக்கத்திற்குரிய உருவமாற்றத்தை (elementary transformation) நிரை உருவ மாற்றத்தைக் கொண்டோ அல்லது நிரல் உருவ மாற்றத்தைக்கொண்டோ அல்லது இரண்டை யும் பயன்படுத்தியோ செய்யலாம்.

தேற்றம் : $m \times n$ தரத்தைப் பெற்ற அணிக்கு ஒவ்வொரு நிரை (நிரல்) உருவ மாற்றத்தைச் செய்வதென்பது அதற்கியைந்த தொடக்க அணியால் முன் (பின்) பெருக்குவதற்குச் சமம்.

உதவித் தேற்றம் (Lemma) : C = AB என்றும், இரு அணி களின் பெருக்கலுக்குச் செய்யப்படும் ஒவ்வொரு நிரை (நிரல்)

உருவமாற்றமும் முன் காரணியான A-க்கு (பின்காரணி B-க்கு) அம்மாதிரியே நிரை (நிரல்) மாற்றங்களைச் செய்வதற்குச் சமம்.

நிரூபணம்: D = AB என்க. இதில் C-க்குச் செய்யப்படும் நிரை உருவ மாற்றம் A-க்குச் செய்யப்படும் அதே நிரை உருவ மாற்றத்திற்குச் சமம் என்று நிறுவுவோம்.

$$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}; \quad B = [C_1\ C_2\ \ldots\ldots\ C_p] \text{ என்க.}$$

பிறகு,

$$D = AB = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & \ldots & R_1C_p \\ R_2C_1 & R_2C_2 & \ldots & R_2C_p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_mC_1 & R_mC_2 & \ldots & R_mC_p \end{bmatrix}$$

A-ன் $R_1, R_2 \ldots\ldots R_m$ ஆகிய நிரைகள் தொடக்கத்திற்குரிய எந்த உருவ மாற்றத்தை அடைந்தாலும், AB என்ற பெருக்கலிலுள்ள நிரைகளும் அதே உருவமாற்றத்தை அடையும் என்பது திண்ணம். காரணம் என்னவெனில், A-ன் ஒவ்வொரு நிரையும் அதன் முறையான AB-ன் நிரையின் ஒவ்வொரு மூலகத்திலும் இருப்பதைக் காண்பதால், இம் முடிவைக் கருதுகிறோம். இதேபோன்று, D-க்குச் செய்யப்படும் நிரல் மாற்றம் A-க்குச் செய்யப்படும். அதே நிரல் உருவ மாற்றத்திற்குச் சமமாகும்.

தேற்றத்திற்கு நிரூபணம்: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$; $A = I_m A$ என்று எழுதுவோம். மேலுள்ள உதவித் தேற்றத்தின்படி I A (= A)-க்கான தொடக்க உருவமாற்றம் I-க்குச் செய்யப்படும் அதே உருவ மாற்றத்திற்குச் சமமாகும். ஆனால், I-க்குச் செய்யப்படும் தொடக்க உருவ மாற்றத்தினால் தொடக்க அணியை (elementary method) பெறுகிறோம். இவ்வாறாக, Aஐ, அதன் முறையான தொடக்க அணியால் முன்பெருக்கல் செய்வதால், A-க்குத் தேவையான நிரை உருவமாற்றத்தைச் செய்துவிட்டதாக அறிகிறோம்.

இதைப்போல, Aஐ, அதன் முறையான தொடக்க அணியால் பின்பெருக்கல் செய்வதால், A-க்குத் தேவையான நிரல் உருவ மாற்றத்தைச் செய்து விட்டதாக அறிகிறோம்.

இவ்வாறாக, A-க்கு ($m \times n$ அணி, செய்ய வேண்டிய தொடக்க நிரை மாற்றத்தை I_m-க்குச் செய்து அதன் முறையான தொடக்க அணியை A-யுடன் முன் பெருக்கிப் பெறுகிறோம்.

இதைப்போன்று A-க்கு ($m \times n$) அணி செய்யவேண்டிய தொடக்க நிரல் மாற்றத்தை I_n-க்குச் செய்து அதன் முறையான தொடக்க அணியை A-யுடன் பின்பெருக்கிப் பெறுகிறோம்.

(நி.வே).

மாதிரி : மேலுள்ள தேற்றத்தை ஓர் உதாரணம் மூலம் சரி பார்ப்போம்.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 + (-2) R_3$ என்ற உருவமாற்றத்தைச் செய்தால்,

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$ மேலும் A-ன் தரம் 3×4 ஆகும்.

A-க்கு நிரை உருவமாற்றத்தைச் செய்துள்ளமையால் அதே மாதிரியான நிரைமாற்றத்தை I_3-க்குச் செய்கிறோம். அதாவது,

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$-க்கு $R_2 + (-2) R_3$ என்ற அதே உருவ மாற்றத்தைச் செய்தால்,

$$E_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_r A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

இவ்வாறாக $E_r A = B$ என்று காண்கிறோம்.

3-J தொடக்கத்திற்குரிய உருவமாற்றங்களின்மூலம் ஓர் அணியின் மதிப்பிடத்தைக் காணுதல் (To find the rank of a Matrix through Elementary Transformations)

ஓர் அணியின் மதிப்பிடத்தைத் தொடக்கத்திற்குரிய உருவ மாற்றங்களின்மூலம் எளிதாகக் காணலாம். இப்பொழுது சில தேற்றங்களைக் காண்போம்.

தேற்றம் : ஓர் அணியின் இருநிரைகளை இடம் மாற்றியமைப்பதால் அவ் வணியின் மதிப்பிடம் மாறுவதில்லை.

நிரூபணம் : A என்பது, r மதிப்பிடத்தைப் பெற்ற அணி என்க. A-லிருந்து R_{ij} என்ற தொடக்கச் செய்கைகள் செய்தபின் பெறப்பட்ட B அணி s மதிப்பிடத்தைப் பெற்ற அணி என்க.

$r = s$ என்று நிறுவவேண்டும்.

இப்பொழுது, $(r+1)$ நிரைகளைப் பெற்ற $|B_0|$ என்ற B-ன் சிற்றணிக் கோவையைக் கருதுக. B-ன் கீழ்அணியான (sub-matrix) B_0-ன் $(r+1)$ நிரைகளும் A-ன் ஒப்பற்ற (unique) கீழ் அணியான A_0-ன் நிரையாகும். அவற்றின் ஒத்த நிரைகள் வெவ்வேறு சார்கின்ற நிலைகளில் (relative positions) அமைந்திருக்கும் என்பதுதான் ஒரு வேற்றுமையாகும். இரு நிரைகளின் இட மாற்றத்தினுல் ஓர் அணிக்கோவையின் குறி மட்டும் மாறும் என்பதால், $|B_0| = |A_0|$ அல்லது $|B_0| = -|A_0|$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

A-ன் மதிப்பிடம் r என்பதால், A-ன் $(r+1)$ நிரைகளைப் பெற்ற சிற்றணிக்கோவையின் மதிப்புப் பூச்சியமாகிறது.

அதாவது, $|A_0| = 0$ எனவே, $|B_0| = 0$

அதாவது, B-ன் $(r+1)$ நிரைகளைக் கொண்ட சிற்றணிக் கோவையின் மதிப்புப் பூச்சியமாகும்.

இவ்வாறுக, $s \leqslant r$ —(1)

(s என்பது B-ன் மதிப்பிடம்) மேலும் Aஐ B-லிருந்து இரு நிரைகளை இடமாற்றியமைத்தாலும் பெறலாம்.

$\therefore\ r \leqslant s$ —(2)

எனவே, (1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $r = s$ என்று நிறுவுகிருேம்.

தேற்றம் : ஒரு நிரையிலுள்ள மூலகங்களை $c \neq 0$ என்ற திசையிலியால் (scalar) பெருக்கினுல் அவ் வணியின் மதிப்பிடம் மாருது.

நிரூபணம் : கொடுக்கப்பட்ட A அணியின் மதிப்பிடம் r என்க.

∴ அணி A-க்கு cR_i $(c \neq 0)$ என்ற தொடக்க உருவமாற்றம் செய்து பெறப்பட்ட அணியான B-ன் மதிப்பிடத்தை s என்க. இப்பொழுது $(r+1)$ நிரைகளைப் பெற்ற $|B_o|$ என்ற B-ன் சிற்றணிக்கோவையைக் கருதுக. பின்பு A-ன் ஒப்பற்ற சிற்றணிக் கோவையான $|A_o|$ (ஒரே ஒரு வேற்றுமை என்னவெனின், சதுரக் கீழ்அணியான B_o ஆனது பாதிக்கப்பட்ட நிரையைப் பெற்றோ அல்லது பெருமலோ இருக்கலாம்,) ஆனது,

$|B_o| = |A_o|$ (பாதிக்கப்பட்ட நிரையை B_o பெற்றிரு விட்டால்),

$|B_o| = C\,|A_o|$ (பாதிக்கப்பட்ட நிரையை B_o பெற்றிருந்தால்) என்றிருக்குமாறு நிலைத்திருக்கும்.

[∴ ஓர் அணிக்கோவையின் நிரையின் ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் ஓர் எண்ணால் பெருக்கினால், அந்த எண் அந்த அணிக் கோவையை முழுவதுமாகப் பெருக்கி விடுகிறது].

A-யின் மதிப்பிடம் r என்பதால், $|A_o| = 0$

எனவே, மேலுள்ள முடிவின்படி $|B_o| = 0$

அதாவது, B-ன் $(r+1)$ நிரைகளைப் பெற்ற சிற்றணிக்கோவையின் மதிப்புப் பூச்சியமாகிறது. இவ்வாறாக, $s \leqslant r$. மேலும், A ஐ B-லிருந்தும் வடிவொத்த (similar) உருவமாற்றத்தினால் பெறலாம் என்பதால், $r \leqslant s$. எனவே, $s = r$.

தேற்றம் : ஓர் அணியின் ஒரு நிரையிலுள்ள மூலகங்களுடன் மற்றொரு நிரையிலுள்ள முறையான மூலகங்களை C என்ற திசையிலியால் பெருக்கி முறையாகக் கூட்டினால், அவ் வணியின் மதிப்பிடம் மாறுவதில்லை.

நிரூபணம் : கொடுக்கப்பட்ட A அணியின் மதிப்பிடம் r என்க. A-லிருந்து $R_i + cR_j$ $(c \neq 0)$ என்ற தொடக்கத்திற்குரிய உருவமாற்றத்தைச் செய்து பெறப்பட்ட அணியான B-ன் மதிப்பிடத்தை s என்க. இப்பொழுது, $(r+1)$ நிரைகளைப்பெற்ற $|B_0|$ என்ற B–ன் சிற்றணிக்கோவையையும் இதற்கு இயைந்ததாக அமைந்திருக்கும் $|A_0|$ என்ற A-ன் சிற்றணிக்கோவையையும் கருதுக. இந்த உருவமாற்றம் A-ன் i ஆம் நிரையை மட்டுமே மாற்றியுள்ளது. ஆனால் அணிக்கோவையின் மதிப்பு, அந்த அணிக் கோவையின் ஒரு நிரையிலுள்ள மூலகங்களுடன் மற்றொரு நிரையிலுள்ள முறையான மூலகங்களை C என்ற திசையிலியால் பெருக்கி முறையாகக் கூட்டுவதால் மாறுவதில்லை.

வகை 1: A_h என்ற கீழ்அணியின் நிரைகள் A-ன் i ஆம் நிரையின் பாகங்களைப் (parts) பெற்றிருக்கவில்லையானால், அல்லது

A-ன் iஆம், jஆம் நிரைகளின் பாகங்களைப் பெற்றிருந்தால், $|B_o| = |A_o|$ ஆகும். A-ன் மதிப்பிடம் r என்பதால், $|A_o| = 0$. எனவே, $|A_o| = 0$.

வகை 2 : A_0 என்ற கீழ் அணியின் நிரைகள் A_0-ன், jஆம், நிரையின் பாகங்களைப் பெற்றிருமல் iஆம் நிரையின் பாகங்களை மட்டும் பெற்றிருந்தால், $|B_o| = |A_o| + c\,|C_o|$.

இதில், C_o என்பது, $(r+1)$ நிரைகளைக் கொண்ட A ன் சதுரக் கீழ்அணியாகும். இதை A_o-லிருந்து A_o-ன் மூலகங்களை அதன் நிரைக்கு இயைந்த A-ன் jஆம் நிரையை அதன் இயைந்த A-ன் jஆம் நிரையை c தடவை பெருக்கிப் பதிலீடு (replace) செய்து பெறுகிறோம். A-ன் மதிப்பிடம் r என்பதால், $|A_0| = 0$.

எனவே, $|C_o| = 0$. இதன் விளைவாக $|B_o| = 0$.

இவ்வாறாக, $(r+1)$ நிரைகளைப் பெற்ற $|B_o|$ என்ற சிற்றணிக் கோவை பூச்சியமாகிறது. $\therefore s \leqslant r$.

A ஐ B-லிருந்து வடிவொத்த தொடக்கத்திற்குரிய உருவ மாற்றத்தால் பெறலாம் என்பதால், $r \leqslant s$ என்றாகிறது. எனவே, $r = s$.

குறிப்பு:

(i) இதுவரை தொடக்கத்திற்குரிய நிரைமாற்றங்கள் ஓர் அணியின் மதிப்பிடத்தை மாற்றுவதில்லை என்று கண்டோம். இதைப்போல் தொடக்கத்திற்குரிய நிரல் மாற்றங்களும் ஓர் அணியின் மதிப்பிடத்தை மாற்றுவதில்லை.

(ii) ஓர் அணியைத் தொடக்க அணிகளால் (elementary matrices) பின் பெருக்கினாலும், முன் பெருக்கினாலும் அவ்வணியின் மதிப்பிடம் மாறுவதில்லை.

(iii) ஓர் அணியை ஒரு சிறப்பற்ற அணியால் (non singular matrix) பொருக்கினால், அவ் வணியின் மதிப்பிடம் மாறுவதில்லை. ஏனெனில், எந்த ஒரு சிறப்பற்ற அணியையும் தொடக்க அணிகளின் பெருக்கலாக எழுதமுடியும் என்பதால் உண்மையாகிறது.

3-K ஓர் அணியின் நியமனவடிவம் (Canonical form of a matrix)

தேற்றம் : r மதிப்பிடத்தைப்பெற்ற ஒவ்வொரு $m \times n$ அணியையும் $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற அணியாக நிரை, நிரல் உருவமாற்றங்களால் ஒடுக்க முடியும். இதனை ஓர் அணியின் நியமன வடிவம்

(Canonical form) என்று கூறுகிறோம். இதில் I_r என்பது r நிரைகளைப்பெற்ற அலகு (unit) அணியாகும்.

நிரூபணம் : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ என்ற அணியைக் கருதுக.

இதன் மதிப்பிடம் r என்க. A பூச்சிய அணி என்றால், இதன் மதிப்பிடம் பூச்சியமாகும். எனவே, தேற்றத்தின் நிரூபணம் தெளிவாகிறது. A பூச்சியமற்ற அணியாகக் கருதினால், குறைந்தது அதன் ஒரு மூலகமாவது பூச்சியமில்லாமல் இருக்கும். இது $a_{ij} = k \neq 0$ என்க. இப்பொழுது iஆம் நிரைக்கு முதல் நிரையையும் jஆம் நிரலுக்கு முதல் நிரலையும் இடம் மாற்றி அமைத்தால், B என்ற அணியை அதன் பிரதான மூலகம் $k \neq 0$ என்றிருக்குமாறு பெறுகிறோம்.

B-ன் முதல் நிரை மூலகங்களை $\frac{1}{k}$ஆல் பெருக்கினால், C என்ற சமமாற்று (equivalent) அணி கிடைக்கிறது. இதன் பிரதான மூலகம் 1 ஆகும். இவ்வாறாக,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \dots\dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots\dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots\dots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

என்ற அணியைப் பெறுகிறோம். முதல் நிரையைத் தகுந்த எண்ணால் பெருக்கி, மீதியுள்ள நிரைகளிலிருந்து கழித்தும் முதல் நிரலைத் தகுந்த எண்ணால் பெருக்கி மீதியுள்ள நிரல்களிலிருந்து கழித்தும் பெறப்படும் அணி,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$ ஆகும். இதில் C என்பது

$(m-1) \times (n-1)$ தரத்தைப்பெற்ற அணியாகும். இப்போது C_1ஐப் பூச்சியமற்ற அணியாகக் கருதி மேற்சொன்ன வழிமுறையின் மூலம்

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & C_2 & \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$ என்று பெறுகிறோம்.

இவ்வாறே தொடர்ந்து செய்துக்கொண்டே போனால், சம மாற்று அணியான $M = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ஐப் பெறுவோம். இங்கு, M என்ற அணியின் மதிப்பிடம் k ஆக உள்ளது. ஆனால், M ஆனது A-க்குச் சமமான அணியாகும் (A-லிருந்து தொடக்கத்திற்குரிய உருவமாற்றம் மூலம் M ஐப் பெற்றுள்ளோம் என்பதால்,.

எனவே, $k = r$ அதாவது $M = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

இவ்வாறாக, r மதிப்பிடத்தைப் பெற்ற ஒவ்வொரு $m \times n$ அணியையும் $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்று தொடக்கத்திற்குரிய உருவமாற்றங்களின்மூலம் ஒடுக்கமுடியும் என்பதைக் காண்கிறோம்.

துணைமுடிவு : $m \times n$ தரத்தைப் பெற்ற A அணியின் மதிப்பிடம் r எனில், P, Q என்ற இரு சிறப்பற்ற அணிகள் PAQ $= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்றிருக்குமாறு நிலைத்திருக்கும்.

நிரூபணம் : r மதிப்பிடத்தை பெற்ற A அணியை $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்று தொடக்கத்திற்குரிய உருவமாற்றங்களின்மூலம் ஒடுக்க முடியும். தொடக்க நிரை (நிரல்) உருவமாற்றம் தொடக்க அணிகளால் முன் (பின்) பெருக்குவதற்குச் சமம் என்பதால்,

$$P_s\, P_{s-1} \ldots\ldots P_1\, A\, Q_1\, Q_2 \ldots\ldots Q_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ இதில்,

P_s ; $P_{s-1} \ldots\ldots P_1$: Q_1, Q_2 ; $\ldots\ldots Q_r$ ஆகியவை முறையான நிரை, நிரல் உருவமாற்றங்களைப் பெற்ற தொடக்க அணிகளாகும். ஒவ்வொரு தொக்க அணியும் சிறப்பற்ற தென்பதால், $P = P_s\, P_{-1} \ldots\ldots P_1$; $Q = Q_1\, Q_2 \ldots\ldots Q_r$ ஆகியவை சிறப்பற்ற அணிகளாகும்.

அதனால், $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ இதில், P, Q ஆகியவை சிறப்பற்ற அணிகளாகும்.

மாதிரி :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & -4 \\ 5 & 3 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியின் மதிப்பிடத்தைக் காண்க.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & -4 \\ 5 & 3 & 3 & 11 \end{bmatrix} \underset{\substack{C_3 - 3C_1 \\ C_4 - 6C_1}}{\overset{C_2 + C_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -6 & -10 \\ 5 & -8 & -12 & -19 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_3 - R_1}{\overset{R_2 - R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & -10 \\ 0 & 8 & -12 & -19 \end{bmatrix} = B$$

i e; $A \sim B$

B ல் 3+3 தரத்தைப் பெற்ற உயர்நிலே சதுரக் கீழ்அணியைக் காண்கிறோம். எனவே, B-ன் சிற்றணிக்கோவையின் தரம் (order) 3 ஆகும்.

அதாவது,

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -10 \\ 0 & -12 & -19 \end{vmatrix} = 1\,(114 - 126) = -6 \neq 0$$

எனவே, B-ன் மதிப்பிடம் (rank) 3ஆகும் B ஆனது A-ன் சமமாற்று (equivalent) அணி என்பதால், A-ன் மதிப்பிடம் 3 ஆகும். அதாவது P (A) = 3

மாதிரி 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$ -ஐ நியமன வடிவத்திற்கு ஒடுக்கிய பின்பு இதன் மதிப்பிடத்தைக் காண்க.

$$A \xrightarrow{R_1 + R_2 R_3} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & -7 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 - R_1} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & -7 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_3 - 3R_2}{\overset{R_1 - 6R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 9 & 12 & 17 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{C_3+2C_1 \\ C_3+4C_1}}{\overset{C_2+C_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 9 & 12 & 17 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_{12}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 & 17 \\ 0 & 4 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_2 - 2R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 4 & -9 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C_4 + 3C_2}{\overset{C_3 + 6R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{2} C_4}{\overset{\frac{1}{15} C_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C_4 - C_3}{\overset{C_4 - 4C_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

இது A-ன் நியமன வடிவமாகும் $P(A) = 3$ ஆகும்.

3-L இணை அணிகளின் பெருக்கலுக்கு மதிப்பிடம் (Rank for multiplication of two matrices)

தேற்றம் : A, B ஆகியவை n நிரைகளைப்பெற்ற சதுர அணிகளெனில் $P(AB) \geqslant P(A) + P(B) - n$.

நிரூபணம் : $P(A) = r$ என்க. P, Q ஆகிய சிறப்பற்ற அணிகள்

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ என்றிருக்குமாறு நிலைத்திருக்கும்.

$$\therefore A = P^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

இப்பொழுது, C என்ற மற்றோர் அணியை,

$$C = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{bmatrix} Q^{-1}$$

என்றிருக்குமாறு கருதுக. அதனால், $A + C = P^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{bmatrix} Q^{-1}$

$$= P^{-1} Q^{-1}$$

இவ்வாறாக, (A+C) என்ற அணி சிறப்பற்றதாக உள்ளது.

மேலும், $P(C) = n-r$; $P(A+C) = n$.

இப்பொழுது,

(A+C) சிறப்பற்றது என்பதால், $P\{(A+C)B\} = P(B)$

மேலும்,

$$P(B) = P[(A+C)B] = P(AB+CB) \leqslant P(AB)+P(CB)$$

ஆனால், $P(CB) \leqslant P(C) = n-r = n-P(A)$

எனவே, $P(B) \leqslant P(AB) + n - P(A)$

அல்லது, $P(AB) \geqslant P(A) + P(B) - n$

இதனை, 'ஸில்வெஸ்டரி' ன் விதி (Sylvester's law) என்று கூறுகிறோம் (நி.வே.)

குறிப்பு :

(i) A,B ஆகியவை n நிரைகளைப் பெற்ற சதுர அணிகளெனின், $P(A) + P(B) - n \leqslant P(AB) \leqslant \min[(A), P(B)]$

(ii) A என்பது, சிறப்பற்ற சதுர அணி எனில், AA^T-ன் மதிப்பிடம் A-ன் மதிப்பிடத்திற்குச் சமம்.

(iii) A,B C ஆகிய அணிகள் $m\times n$, $n\times p$, $p\times t$ என்ற தரத்தை முறையே பெற்றிருந்தால், $P(AB) + P(BC) \leqslant P(B) + P(ABC)$ ஆகும்.

$$P(AB) + P(BC) \leqslant P(B) + P(ABC)$$

இதனை, ஃப்ரோபினியஸ் சமனிலி (Frobenius inequitity) என்று கூறுகிறோம்.

வெக்டர் வெளி : V ஐ, F என்ற களத்தின்மேல் உள்ள வெக்டர் வெளி என்று கூறவேண்டுமானால், கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளுக்கு அஃது உள்பட்டிருக்கவேண்டும்.

(i) கூட்டலைப் பொறுத்து V ஆனது, ஒரு பரிமாற்றுக் குலமாக (group) இருக்கவேண்டும்.

(ii) $l(x+y) = lx+ly$; $l \in F$; $x, y \in v$

(iii) $(l+m)x = lx+mx$; $l, m \in F$; $x \in v$

(iv) $l(mx) = (lm)x$; $l, m \in F$; $x \in v$

(v) $1.x = x.1$ என்பது. F என்ற களத்தின் ஒருமையுறுப்பாகும்.

வெக்டர் உள்வெளி (Vector sub space): S ஆனது, கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டால், அதனை V_n-ன் வெக்டர் உள்வெளி என்கிறோம்.

(i) V_n-ன் பூச்சியமற்ற உள்குழுவாக இருக்க வேண்டும்.

(ii) $x_1 y \in s$ எனில், $x+y \in s$ என்றிருத்தல் வேண்டும்.

(iii) $x \in s$ எனில், $k x \in s$ என்றிருத்தல் வேண்டும்.

வெக்டர் உள்வெளியின் பரிமாணம் (Dimension of vector sub-space): ஒரு வெக்டர் உள்வெளியின் அடிப்படைக் குழுவில் உள்ள வெக்டர்களின் எண்ணிக்கையை அவ் வுள்வெளியின் பரிமாணம் (dimension of sub-space) என்று கூறுகிறோம்.

நிரை, நிரல் மதிப்பிடம் (Row and column rank): $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ என்க. இந்த A அணியின் நிரை வெக்டர்கள் R_1, R_2 . R_m என்பவை உருவாக்கும் உள்வெளியை அணி A-ன் நிரைவெளி (row space) என்கிறோம். இந்த நிரை வெளியின் பரிமாணத்தை நிரை மதிப்பிடம் (row rank) என்கிறோம். இதைப் போல, A அணியின் நிரல் வெக்டர்களான C_1, C_2......, C_n என்பவை உருவாக்கும் உள்வெளியை அணி A-ன் நிரல் வெளி (column space) என்கிறோம். இந்த நிரல் வெளியின் பரிமாணத்தை அணி A-ன் நிரல் மதிப்பிடம் (column rank) என்கிறோம்.

3-M இரு அணிகளின் கூட்டலுக்கு மதிப்பிடம் (Rank for sum of two matrices)

தேற்றம்: A, B என்ற அணிகள், ஒரே தரத்தைப் பெற்ற அணிகளெனில், $P(A + B) \leqslant P(A) + P(B)$.

நிரூபணம்: S_A, S_B, S_{A+B} என்பவை, A, B, A + B ஆகிய அணிகளின் நிரை வெளிகள் (row spaces) என்க. A, B ஆகிய இரு அணிகளின் நிரைகளால் சேர்ந்து பிறப்பிக்கப்படும் (generated) வெளியை S என்று குறிப்போம்.

இப்பொழுது,

$$S_{A+B}\text{-ன் பரிமாணம்} \leqslant S\text{-ன் பரிமாணம்}$$
$$\leqslant S_A\text{-ன் பரிமாணம்} + S_B\text{-ன் பரிமாணம்}.$$
$$\therefore (A+B) \leqslant P(A) + P(B)$$

தேற்றம்: ஓர் அணியின் நிரை மதிப்பிடம் (row rank) அந்த அணியின் மதிப்பிடத்திற்குச் சமம்.

நிரூபணம் : A அணியின் மதிப்பிடம் r எனவும், நிரை மதிப்பிடம் s எனவும் கொள்க. சிறப்பற்ற அணியால் (nonsingalar matrix) பெருக்குவதால், அந்த அணியின் மதிப்பிடமோ, நிரை மதிப்பிடமோ மாற்றமடைவதில்லை என்பதால், R என்ற சிறப்பற்ற அணி $RA = \begin{bmatrix} k \\ o \end{bmatrix}$ என்றிருக்குமாறு நிலைத்திருக்கிறது.

இங்கு, k என்பது, $s+n$ தரத்தைப் பெற்ற அணியாகும்.

இப்பொழுது, $P(RA) = P(A) = r$.

RA அணியின் $(s \times 1)$ தரத்தைப் பெற்ற ஒவ்வொரு சிற்றணிக் கோவையும் குறைந்தது ஒரு நிரையையாவது பூச்சியமாகப் பெற்றிருக்கும் என்பதால் $P(RA) \leqslant s$ அதாவது $r \leqslant s$.

இப்பொழுது, A-ன் தரம் r என்பதால், P என்ற சிறப்பற்ற அணி.

$$PA = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$$ என்றிருக்குமாறு நிலைத்திருக்கும். இங்கு G என்பது, $r \times n$ தரத்தைப் பெற்ற அணியாகும்.

PA-ன் நிரை மதிப்பிடம் = A-ன் நிரைமதிப்பிடம் = s ஆகும்.

மேலும், PA-ல் r பூச்சியமற்ற நிரைகளுள்ளது. எனவே, PA-ன் நிரை மதிப்பிடம் அதிகபட்சம் r ஆக இருக்கும். இதனுல், $s \leqslant r$ எனவே, $r = s$.

துணைமுடிவு : ஓர் அணியின் நிரல் மதிப்பிடம் அந்த அணியின் மதிப்பிடத்திற்குச் சமம்.

நிரூபணம் : A-ன் நிரல்கள் A^T-ன் நிரைகள் என்பதால், A-ன் நிரல் மதிப்பிடம்

= A^T-ன் நிரை மதிப்பிடம்

= A^T-ன் மதிப்பிடம்

= A-ன் மதிப்பிடம்.

(தி.வே.).

பயிற்சி 3

1. கீழ்க்காணும் அணிகளின் மதிப்பிடத்தைக் காண்க.

(i) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & 2 \\ 0 & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

...ARA PUBL...

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

2.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

என்ற அணியை நியமனவடிவமாக ஒடுக்கி மதிப்பிடத்தைக் காண்க.

3. கீழ்க்காணும் அணிகள் சமமாற்று (equivalent) அணிகளா என்பதைக் காண்க.

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 11 & 6 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & -9 & 14 \\ 0 & -2 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

4. (x_i, y_i); $i = 1, 2, 3$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டிலிருக்க (collinear) வேண்டுமானால், $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் மதிப்பிடம் 3ஐவிடக் குறைவாக இருக்கவேண்டும் என்பதை நிரூபி.

5. $(A - I)$, $(B - I)$ ஆகிய அணிகளின் மதிப்பிடம் முறையே p, q எனில், $(AB - I)$-ன் மதிப்பிடம் $\leqslant (p + q)$ என்பதை நிறுவுக.

6. $P(A^m) = (A^{m+1}) \implies P(A^m) = P(A^n) \ \forall \ n \geqslant m$ என்பதை நிரூபி.

7. B என்ற அணி சதுரமாகவும், சிறப்பற்றதாகவுமிருந்தால் $\Gamma(AB) = \Gamma(A)$ என்பதை நிரூபி.

8. $m \times n$ தரத்தைப் பெற்ற அணி A-ன் மதிப்பிடம் m, $r \times m$ தரத்தைப் பெற்ற அணி S-ன் மதிப்பிடம் r எனில் $P(SA) = r$ என்பதை நிரூபி.

9. $A = \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}$; இங்கு P, Q ஆகியவை கீழ்அணிகள் (sub-matrices) எனில்,

$$P(A) = P(P) + \Gamma(Q)$$ என்பதை நிறுவுக.

10. $A, -A, A^T, \bar{A}, A^{\Theta}$ ஆகிய அணிகள் ஒரே மதிப்பிடத்தைப் பெற்றுள்ளன என்பதை நிறுவுக.

11. P(A) என்பது A அணியின் மதிப்பிடமெனில், $P(AB) \leqslant$ நீசம் $[\,P(A),\ P(B)\,]$ என்பதை நிறுவுக.

12. கீழ்க்காணும் கூற்றுகளை நிரூபி.

(*a*) $P(AA^T) = \Gamma(A)$

(*b*) B என்ற அணி சதுரமாகவும், சிறப்பற்றதாகவுமிருந்தால் $P(AB) = R(A)$.

குறிப்பு:

$P(AB) \leqslant$ நீசம் $[P(A),\ \Gamma(B)]$

$A = (AB)(B)^{-1}$

$\therefore \ \Gamma(A) = P[(AB)(B^{-1})] \leqslant P(AB)$

எனவே, $P(AB) = [\,(A)\,]$

4. நேரெதிர் அணி

(Inverse Matrix)

அணிகளுக்கு அவற்றின் வகுத்தல் முறையை வரையறுக்க இயலாது. ஆனால், சில சந்தர்ப்பங்களில் அணிகள் A-ம், C-ம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, B என்ற அணியை AB = C...(4·1) என்றிருக்குமாறு காணமுடியும். இஃது ஒருவிதத்தில் Cஐ A-ஆல் வகுப்பதற்கு ஒப்பாகும். A^{-1} என்ற ஏதோ ஓர் அணியை,

$A A^{-1} = I$; $A^{-1} A = I$ என்றிருக்குமாறு காணமுடியும்.

பிறகு சமன்பாடு (1 -ன் இடப்புறத்தை A^{-1}ஆல் முன் பெருக்கல் (pre-multiplication) செய்தால், $A^{-1} AB = IB = B = A^{-1} C$.

இப்பொழுது, அணி B ஆனது கண்டுபிடிக்கப்பட்டுவிட்டது. A^{-1} என்ற அணியை நேரெதிர் அணி (inverese matrix) என்று கூறுகிறோம். இது நிலைத்திருக்க (exi ') வேண்டிய அவசியமில்லை.

4-A ஒரு நேரெதிர் அணியின் நிலைபாடு (The existence of an inverse matrix)

வரையறையின்படி, A-ன் நேரெதிரணியான

$$A^{-1}, = AA^{-1} = I = A^{-1}A \quad \dots (4 \cdot 2)$$

என்றிருக்குமாறு அமையும். இச் சமன்பாட்டின் எல்லாப் பிரிவுகளுக்கும் பெருக்கல் விதியை பயன்படுத்த முடியுமென்றால், A-லுள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கை I-லுள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்கும்; இதனால் A^{-1}-லுள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்கும் சமமாக இருக்கவேண்டும். வடிவொத்த முறையில் (similarly) A^{-1}-லுள்ள நிரல்களின் எண்ணிக்கை I-லுள்ள நிரல்களின் எண்ணிக்கைக்கும், இதனால் Aலுள்ள நிரல்களின் எண்ணிக்கைக்கும் சமமாக இருக்கவேண்டும். $A A^{-1}$ என்ற செயற்பாடு அர்த்தமுடையதாக இருக்க வேண்டுமெனில், A-லுள்ள நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் A^{-1}லுள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

எனவே, இவ்வெல்லா நிபந்தனைகளும் பூர்த்திசெய்யப்பட வேண்டுமெனில், A; A^{-1} ஆகிய இரண்டும் ஒரே தரத்தைப் (same

order) பெற்ற சதுர அணிகளாக இருக்கவேண்டும். எனவே, ஓர் அணி சதுர அணியாக இருந்தால், நேரெதிர் அணி நிலைத்திருக்கும் என்பது போதுமான (sufficient) நிபந்தனையாகும் என்று அறிகிறோம்.

இதே முடிவை ஒருபடி சமன்பாடுகளைக் கருதுவதால் அறிய முடியும்.

$$AX = B \tag{4·3}$$

என்ற வடிவிலுள்ள ஒருபடி சமன்பாடுகளைக் கருதுக. இதில் X-ம் B-ம் ஒரே தரத்தைப் பெற்ற நிரல்வெக்டர்களாகும். A^{-1} நிலைத்திருந்தால் (exist), இச் சமன்பாடுகளின் ஒரு தீர்வு,

$$X = A^{-1} B \tag{4·4}$$

ஆகும். எனவே, A^{-1}-ன் நிலைப்பு சமன்பாடுகளின் தீர்வுக்கான நிலைபாட்டை குறிப்பிடுகிறது. பொதுவாகச் சமன்பாடு (3)-ன் தீர்வுகள் நிலைத்திருக்க அச் சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையும் தெரியாத மாறிகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருக்கவேண்டும். அதாவது, அணி A சதுர அணியாக இருக்கவேண்டும். அணி A சதுர அணி என்பதால், சமன்பாடு (2)-க்கு அணிக்கோவை செய்தால்,

$$| A A^{-1} | = | A | \, | A^{-1} |, = | I | = I \tag{4·5}$$

என்று கிடைக்கிறது. இதனால், முடிவுள்ள அல்லது திட்டமான நேரெதிர் அணி நிலைக்க $| A | \neq 0$ என்று விளங்குகிறது. இது A^{-1} நிலைத்திருப்பதற்காக வேண்டிய நிபந்தனை (necessary condition) யாகும். அதாவது, அணி A சிறப்பற்ற அணியாக இருக்கவேண்டும்.

4–B சேர்ப்பு அணி (Adjoint matrix)

A என்ற சதுர அணியிலுள்ள a_{ij} என்ற மூலகங்களுக்குப் பதிலாக அவற்றின் இணைக்காரணியான (cofactor) A_{ij}-ஐ மூலகங்களாகக் கொண்டு திருப்பு அணியாக அமைந்தால், அவ்வணியைச் சேர்ப்பு அணி என்கிறோம். இதனைச் சேர்ப்பு A என்று குறிக்கிறோம்.

இவ்வாறாக, சேர்ப்பு $A = [A_{ij}]^T$

சேர்ப்பு அணியின் பொது மூலகத்தை A_{ji} என்று குறிக்கிறோம். இப்பொழுது A = B எனக் கருதுக.

இதில், B என்பது A அணி, சேர்ப்பு அணி A ஆகியவற்றின் பெருக்கலாகும். பெருக்கல் விதிப்படி,

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$$ ஆனால்,

அணிக்கோவையின் விரிப்புப்படி, $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = |A| \quad i=j$

$= 0 \quad i \neq j$

எனவே, B என்ற அணி மூலைவிட்ட அணியாக $|\mathbf{A}|$ என்ற மூலகங்களைப் பெற்று அமைகிறது.

அதாவது, A சேர்ப்பு A = B = $|A|$ I

∴ A. சேர்ப்பு A = $|A|$

தேற்றம் : (i) A. (சேர்ப்பு A) = (சேர்ப்பு A). A = $|A|$

(ii) $|$(சேர்ப்பு A)$|$ = $|A|^{n-1}$

நிரூபணம் ; $|\mathbf{A}$. சேர்ப்பு A$|$ = $|A|$ $|$சேர்ப்பு A$|$

ஆனால், $|$A. சேர்ப்பு A$|$ = $|A|$ I

$|$A. சேர்ப்பு A$|$ = $|A|$ $|$சேர்ப்பு A$|$ = $|A|$ I

∴ $|$சேர்ப்பு A$|$ = $|\mathbf{A}|^{n-1}$ ஆகும்.

(iii) சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A) = $|A|^{n-2}$ A

நிரூபணம் : சேர்ப்பு A [சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A)] = $|$சேர்ப்பு A$|$ I

= $|A|^{n-1}$ I

A. சேர்ப்பு A [சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A)] = **A** $|A|^{n-1}$ I

$|A|$ I சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A) = $|A|^{n-1}$ A

அணிக்கோவையின் மதிப்புப் பூச்சியமில்லாமையால்,

சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A) = $|A|^{n-2}$ **A**

(iv) சேர்ப்பு (AB) = (சேர்ப்பு B) (சேர்ப்பு A)

நிரூபணம் : $|A|$ $|B|$ (சேர்ப்பு B) (சேர்ப்பு A)

= $|AB|$ I(சேர்ப்பு B) (சேர்ப்பு A)

= [சேர்ப்பு (AB)] (AB) (சேர்ப்பு B) (சேர்ப்பு A)

= [சேர்ப்பு (AB)] A [B சேர்ப்பு B] [சேர்ப்பு A]

= [சேர்ப்பு (AB)] A $|B|$. I [சேர்ப்பு A]

= $|B|$ [சேர்ப்பு (AB)] [A. சேர்ப்பு A]

$$= |B| \; [\text{சேர்ப்பு}\,(AB)]\, A\, I$$

$$= |A| \; |B| \; [\text{சேர்ப்பு}\,(AB)]$$

அணிக்கோவைகள் $|A|$, $|B|$ ஆகியவற்றின் மதிப்புப் பூச்சியமில்லை என்பதால்,

$$[\text{சேர்ப்பு } B]\,[\text{சேர்ப்பு } A] = [\text{சேர்ப்பு}\,(AB)]$$

4—C நேரெதிர் அணி (Inverse matrix)

இப்பொழுது,

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$ -ன் நேரெதிர் அணியைக் காண்போம். M-ன் இணைக்காரணி அணி (Cofactor matrix).

$$N = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix}$$ என்க. பிறகு, $$N^T = \begin{bmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ C & F & I \end{bmatrix}.$$

இப்பொழுது,

$$MN^T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ C & F & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} aA+bB+cC & aD+bE+cF & aG+bH+cI \\ dA+cB+fG & dD+eE+fF & dG+eH+fI \\ gA+hB+iC & gD+hE+iF & gG+hH+iI \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} \triangle & 0 & 0 \\ 0 & \triangle & 0 \\ 0 & \triangle & 0 \end{bmatrix}$$

இணைக்காரணிகளின் தன்மைகளின்படி,

இதில் $$\triangle = |M| = \triangle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\therefore MN^T = \triangle I$$

அல்லது, $M\left(\dfrac{N^T}{\triangle}\right) = I$ ஆனால், $MM^{-1} = I$

எனவே, $M^{-1} = \frac{N^T}{\Delta}$

N^T என்பது, M அணியின் சேர்ப்பு அணியாகும்.

இவ்வாருக $M^{-1} = \frac{\text{சேர்ப்பு } M}{|M|}$

மாதிரி :

A^{-1} என்ற நேரெதிர் அணியை A $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ -லிருந்து

காண்க. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = 11$

இங்கு, அணி A, சதுர அணியாகவும் சிறப்பற்ற அணியாகவும் உள்ளது. எனவே, நேர் எதிர் அணி நிலைத்திருக்கும் என்று தெரிகிறது. கொடுக்கப்பட்ட A அணியின் இணைக்காரணி, A $= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

எனவே, சேர்ப்பு A $= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{சேர்ப்பு } A}{|A|} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

மாதிரி :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ எனில், A^{-1} ஐக் காண்க.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -7$$

இணைக்காரணி அணிகளின் மூலகங்கள் பின்வருமாறு:

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$; $\quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$; $\quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5$

$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $\quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11 ; \qquad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\text{சேர்ப்பு } A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 11 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{சேர்ப்பு } A}{|A|}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 11 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

4-D திருப்பு அணிக்கு நேரெதிர் அணி (The inverse of the transpose of a matrix)

A^{-1} நிலைத்திருக்குமாறு A என்ற அணி சதுரச் சிறப்பற்ற அணியைக் கருதினால், $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

திருப்பத்தை (transpose) இரு புறமும் செயல்படுத்தினால்,

$$(A^{-1})^T A^T = I = A^T (A^{-1})^T$$

A^T-ன் நேரெதிர் அணி $(A^{-1})^T$ என்பதை இச் சமன்பாடு தெளிவாக்குகிறது.

எனவே, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

4-E அணிகளின் பெருக்கலுக்கு நேரெதிர் அணி (The inverse of the product of matrices)

ஒரே தரத்தைப் (order) பெற்ற A, B என்ற இரு சிறப்பற்ற அணிகள் எனில், AB-ம் சிறப்பற்ற அணியாகும்.

மேலும், $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

நிரூபணம் : $|AB| = |A| \, |B|$; $|A| \neq 0$; $|B| \neq 0$ என்பதால், $|AB| \neq 0$

எனவே, AB-ன் நேரெதிர் அணி நிலைத்திருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது. A,B ஆகியவை சிறப்பற்ற அணிகள். எனவே, A^{-1}, B^{-1} ஆகியன நிலைத்திருக்கும்,

மேலும், $AA^{-1} = A^{-1}A = I;\ BB^{-1} = B^{-1}B = I$

$\therefore (B^{-1}A^{-1})\ (AB) = B^{-1}\ (A^{-1}A)B$ (சேர்ப்பு விதியின்படி)

$= B^{-1}\ (IB) = B^{-1}B = I$

மேலும், $(AB)\ (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})\ A^{-1} = (IA^{-1}) = I$

இவ்வாறாக, $AB\ (B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})\ (AB) = I.$

எனவே, $B^{-1}A^{-1}$ என்பது, (AB)-ன் நேரெதிர் அணியாகும்.

$$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}\ A^{-4}$$

குறிப்பு :

$$[A_1A_2A_3 \ldots\ldots A_n]^{-1} = A_n^{-1}\ A_{n-1}^{-1} \ldots\ldots A_2^{-1}\ A_1^{-1}$$

தேற்றம் : A, என்ற $n \times n$ தரத்தைப் பெற்ற சிறப்பற்ற சதுர அணி இணைத்திருப்பு (conjugate transpose) நேரெதிர் (inverse) ஆகிய செயற்பாடுகளுக்குப் பரிமாற்று விதியைப் பின்பற்றுகிறது.

அதாவது, $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

நிரூபணம் : $|A^*| = |A| \neq 0$ என்பதால், A^*-க்கு நேரெதிர் அணி நிலைத்திருக்கிறது.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

இரு மருங்கிலும் இணைத்திருப்புச் செய்தால்,

$$(AA^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I_n^*$$

$$(A^{-1})^*\ A^* = (A^{-1})^* = I_n$$

[இணைத்திருப்பின் மாற்று விதிப்படி]

$(A^{-1})^*$ என்பது, A^*-ன் நேரெதிர் என்பதை மேலுள்ள சமன்பாடு தெளிவாக்குகிறது.

எனவே, $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

4-F நேர்எதிர் அணியைக் காண 'காஸ்–ஜோர்டான்' முறை (The Gauss Jordan method for calculating the inverse)

A என்பது, சதுரச் சிறப்பற்ற அணி என்க.

பிறகு, AX = Y என்ற வடிவவுள்ள ஒருபடிச் சமன்பாடுகளைச் சமமாக

$$AX = IY \text{ என்று எழுதலாம்} \qquad \ldots (4{\cdot}5)$$

$$\text{இதன் தீர்வு,}\quad Ix = A^{-1}\,Y \qquad \ldots (4{\cdot}6)$$

(4·5)-லுள்ள சமன்பாடுகளுக்கு அடுத்தடுத்துக் குணகங்களைத் தொடக்கத்திற்கு நிரை உருவமாற்றம் (elementary row transformation) செய்து நீக்குவதால் தீர்வு காணமுடியும். அதாவது, முதல் சமன்பாட்டுடன் ஒரு தகுந்த எண்ணால் பெருக்கி, மீதியுள்ள சமன்பாடுகளிலிருந்து இதனைக் கழிக்கிறோம். அடுத்தடுத்துச் சமன்பாடுகளுக்கும் இவ்வாறே செய்கிறோம். அதாவது, (4.6)-லுள்ளது போல் சமன்பாட்டைப் பிறப்பிக்க (generate) வேண்டும். இப்பொழுது, Y, X ஆகியவற்றின் மதிப்பு இந் நீக்கங்களில் உண்மையான பங்கேற்கவில்லை. A, I ஆகிய அணிகள், தொடக்கத்திற்குரிய நிரை உருவமாற்றங்களினால் I, A^{-1} என்று ஒடுக்கப்படுகின்றன (reduce). இவ்வாறு, A^{1}ஐக் காண இம் முறை பயன்படுகிறது.

மாதிரி: 'காஸ் ஜோர்டான்' நீக்க முறையின்மூலம் A-ன் நேர் எதிர் அணியைக் காண்க.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

நிரை உருவமாற்றங்களை R_i என்று குறிப்போம்.

$R_2 \to R_2 - 2R_1$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$R_3 \to 5R_3 - R_2$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 1 & 5 \end{array}$$

$R_1 \to 7R_1 - 3R_3$, $R_2 \to 7R_2 + 2R_3$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 14 & 0 & 1 & 3 & -15 \\ 0 & -35 & 0 & -10 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & -1 & 5 \end{array}$$

$R_2 \to R_2/-5$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 14 & 0 & 1 & 3 & -15 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & -1 & 5 \end{array}$$

$R_1 \to R_1 - 2R_2$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & -3 & 8 & -11 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & -1 & 5 \end{array}$$

எனவே, $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 & 8 & -11 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

4-G சுழற்சித்தானம் செய்தல் (Pivoting)

மேலுள்ள மாதிரியில் எல்லா மூலகங்களும் முழு எண்களாக அமையுமாறு $R_1 \rightarrow 7R_1 - 3R_3$ போன்ற நிரை மாற்றங்கள்மூலம் பராமரிக்கப்பட்டது. நடைமுறையில் கணணியானது (computer) இந்த நிரை மாற்றத்தை $R_1 \rightarrow R_1 - \frac{3}{7}R_3$ என்று முழு எண்ணுக இல்லாமலிருக்கும்படி செயல்புரியும். சாதாரணமாக, எல்லா அணி களின் மூலகங்களும் முழு எண்ணுக அமைவதில்லை என்பதால், இம் மாதிரியான நிரை மாற்றங்களைச் செய்வதனுல் தவறேது மில்லை. இதனுல், திருத்தல் பிழைகள் (rounding off errors) ஏற்படும். இம்மாதிரிப் பிழைகள் சுழற்சித்தானம் செய்யப்படுவதால் குறைக்கப்படுகின்றன. அணியின் மிகப்பெரிய மூலகம் இருக்கும் இடத்தை அறிந்து, அந்த மூலகம் பிரதான மூலைவிட்டத்தில் அமையுமாறு நிரைகளை மாற்றி அமைக்கிருேம். இந்தப் பெரிய மூலகத்தைப் பயன்படுத்தி, அந்த மூலகம் அமைந்துள்ள நிரலின் மற்ற மூலகங்களை நீக்குகிருேம். இம் முறையை அலகு மூலைவிட்ட அணியை (unit matrix) பெறும்வரை முழுவதுமாகச் செயல்படுத்து கிருேம். இந்த அலகு அணியை ஒத்திருக்கும் முறையான நேரெதிர் அணியைக் 'காஸ்-ஜோர்டான்' முறையிலுள்ளது போல் காண்கிருேம்.

மாதிரி:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ எனில், A^{-1} ஐச் சுழற்சித்தானம் செய்து

'காஸ்ஜோர்டான்' முறையின்மூலம் காண்க. நாம் $R_i - (b/a)R_j$ என்ற செய்கையைச் செய்வதற்குப் பதிலாக, $aR_i - bR_j$ என்ற செய்கையைச் செய்து அணிகளின் மூலகங்களை முழு எண்ணுக இருக்கும்படி பராமரிப்போம். கொடுக்கப்பட்ட அணியைக் கீழ்க் கண்டவாறு அமைப்போம்.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

இதில் மிகப்பெரிய மூலகமான (ஐப் பிரதான மூலைவிட்டத்தில் அமையுமாறு நிரைகளைமாற்றி அமைக்கவேண்டும். இங்கு, இரண்டாம் நிரையையும், மூன்றும் நிரையையும் இடமாற்றம் செய்வதால் கீழ்க்காணுமாறு அமைகிறது.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$R_1 \rightarrow 6R_1 - R_3\ ,\ R_2 \rightarrow 2R_2 - R_3$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

மூன்றும் நிரையை பயன்படுத்தி நீக்கம் செய்தோம். இப்பொழுது அடுத்த பெரிய மூலகமான 5 ஆனது, முதல் நிரையில் பிரதான மூலைவிட்டத்தில் அமைந்துள்ளதென்பதால் நிரைமாற்றம் தேவையில்லை.

$$R_2 \rightarrow 5R_2 - R_1;\ R_3 \rightarrow 5R_3 - R_1$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 30 & -6 & 6 & 0 \end{array}$$

$$R_1 \rightarrow 2R_1 - R_2\ ;\ R_3 \rightarrow 5R_3 - R_2$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & 30 & 10 & -30 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 30 & 30 & 30 & -60 \end{array}$$

இறுதியாக $R_1 \rightarrow R_1/10\ ;\ R_2 \rightarrow R_2/2;\ R_3 \rightarrow R_3/30$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

4-H தோராய நேரெதிர் அணியைத் துல்லியமாக்குதல் (Improving the accuracy of an approximate inverse)

A என்ற அணியின் தோராய நேரெதிர் அணி B எனின்,

$$AB = I - E \tag{4·7}$$

இதில் E என்ற அணி, AB என்ற பெருக்கலுக்கு I-ன் விலக்கமாகும் (deviation). தற்செயலாக, B என்ற அணி A-ன் சரியான நேரெதிரணி எனில், E = 0 ஆகும்.

இப்பொழுது, (7)-லிருந்து $B = A^{-1} - A^{-1}E$

வரிசைப்படுத்தி அமைத்தால், $A^{-1} = B + A^{-1}E$ (4·8)

இச் சமன்பாட்டின் வலப்புறத்தில் A^{-1}-க்குப் பிரதியிட்டால்.

$$A^{-1} = B + (B + A^{-1}E)\,E = B + BE + A^{-1}E^2$$

திரும்பத்திரும்ப A^{-1}-க்குப் போதுமான தடவை பிரதியிட்டால்,

$$A^{-1} = B + BE + BE^2 + \dots\dots\dots + BE^n \tag{4·9}$$

இம்மாதிரித் துல்லியமாக A^{-1}-காண முடியும் என்றாலும், $B + BE + BE^2 = C$ஐ மட்டும் கருதி, ஓரளவு துல்லியமான நேரெதிர் அணியைக் காணமுடியும்.

மாதிரி :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

A-ன் தோராய நேரெதிர் அணி $B = \begin{bmatrix} 1·7 & -1·2 & 0·2 \\ -0·5 & 1·5 & -0·5 \\ -0·2 & -0·25 & 0·2 \end{bmatrix}$

எனின், A-ன் ஓரளவு துல்லியமான நேரெதிர் அணியைக் காண்க.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1·7 & -1·2 & 0·2 \\ -0·5 & 1·5 & -0·5 \\ -0·2 & -0·25 & 0·2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0·05 & -0·1 \\ 0·1 & 1·05 & -0·2 \\ 0·3 & 0·1 & 0·5 \end{bmatrix}$$

எனவே, $E = I - AB = -\begin{bmatrix} 0 & 0·05 & -0·1 \\ 0·1 & 0·05 & -0·2 \\ 0·3 & 0·1 & -0·5 \end{bmatrix}$

$$BE = -\begin{bmatrix} 1\cdot7 & -1\cdot2 & 0\cdot2 \\ -0\cdot5 & 1\cdot5 & -0\cdot5 \\ -0\cdot2 & -0\cdot25 & 0\cdot2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0\cdot05 & -0\cdot1 \\ 0\cdot1 & 0\cdot05 & -0\cdot2 \\ 0\cdot3 & 0\cdot1 & -0\cdot5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0\cdot06 & -0\cdot045 & 0\cdot03 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0\cdot035 & 0\ 0025 & 0\cdot03 \end{bmatrix}$$

$$B\cdot E^2 = -\begin{bmatrix} 0\cdot0045 & 0\cdot00375 & -0\cdot012 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0\cdot00825 & 0\cdot0014 & -0\cdot012 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ B + BE + BE^2 = \begin{bmatrix} 1\cdot755 & -1\cdot249 & 0\cdot242 \\ -0\cdot5 & 1.5 & -0\cdot5 \\ -0\cdot244 & -0\cdot249 & 0\cdot242 \end{bmatrix}$$

எனவே, A-ன் ஓரளவு துல்லியமான நேரெதிர் அணி

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1\cdot755 & -1\cdot249 & 0\cdot242 \\ -0\cdot5 & 1.5 & -0\cdot5 \\ -0\cdot244 & -0.249 & 0\cdot242 \end{bmatrix}$$

4-I அணியைப் பாகுபடுத்தி அதன் நேரெதிர் அணியைக் காணுதல்
(Calculating the inverse by means of partitioning)

கொடுக்கப்பட்ட A அணியின் நேரெதிர் அணியைக் காண A_{11}-ம் A_{22} ம் சதுர (square) சிறப்பற்ற (non-singular) அணியாக இருக்கும்படி பாகுபடுத்தவேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட அணியின் பாகுபடுத்தப்பட்ட அணி $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ என்க.

இதில், A_{11} A_{12} A_{21} A_{22} ஆகியவை அணிகளாகும்.

இதன் நேரெதிர் அணி, $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ எனில்,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ என்றாகும்.}$$

இதில் I என்பது முறையான தரத்தைப் பெற்ற அலகு அணியாகும்.

$$\implies A_{11}X + A_{12}Z = I \qquad \text{(i)}$$
$$A_{11}Y + A_{12}W = 0 \qquad \text{(ii)}$$
$$A_{21}X + A_{22}Z = 0 \qquad \text{(iii)}$$
$$A_{21}Y + A_{22}W = I \qquad \text{(iv)}$$

(i), (iii) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$A_{11}X = I - A_{12}Z \quad \text{மேலும்}, \; -A_{22}^{-1}A_{21}X = Z$$
$$\implies A_{11}X = I + A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}X$$
$$\implies (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})X = I$$
$$\implies X = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{1}A_{21})^{-1}$$

இதைப்போல், Y, Z, W ஆகியவற்றின் மதிப்புகள்

$$Y = -A_{11}^{-1}A_{12}W;$$
$$Z = -A_{22}^{-1}A_{21}X;$$
$$W = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட A அணி, $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ என்று பாகுபடுத்தப்பட்டால், (A_{11}, A_{22} சதுர, சிறப்பற்ற அணிகளாக) இதன் நேரெதிர் அணியான

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{21}w \\ -A_{22}^{-1}A_{21}X & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix}$$

இம்முறையில் நான்கு நேரெதிர் அணிகளைக் காணவேண்டும்.

அதாவது, A_{22}^{-1}; A_{11}^{-1}; $(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$; $(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$ ஆகியவற்றைக் காணவேண்டும்.

கவனிக்கவும்:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$ என்று கருது

வதற்குப் பதிலாக, $\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ என்று

கருதினால்,

$$X = (A_{11} - A_{12} \quad A_{22}^{-1} \quad A_{21})^{-1}$$

$$Y = -X \; A_{12} \; A_{22}^{-1}$$

$$Z = -A_{22}^{-1} \; A_{21} X$$

$$W = A_{22}^{-1} - ZA_{12} \; A_{22}^{-1}$$

இம் முறையில் இரண்டு நேர்எதிர் அணிகளைக் கண்டுபிடித்தால் போதுமானது. அவை A_{22}^{-1}; $(A_{11} - A_{12} \; A_{22}^{-1} \; A_{21})^{-1}$ ஆகும்.

இதனுல் கொடுக்கப்பட்ட அணியின் நேரெதிர் அணியை எளிதில் காணமுடியும்.

மாதிரி :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ ஐப் பாகுபடுத்தி இதன் நேரெதிர்

அணியான A^{-1} ஐக் காண்க.

$$A = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ \hdashline 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$ என்று பாகுபடுத்துவோம்.

இதன் நேரெதிர் அணியை $\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}$ என்று கொண்டால்,

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad - (1)$$

இதில்,

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix};\ A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix};\ A_{21} = [\,1 \quad 1\,];\quad A_{22} = 2$$

$$\begin{aligned}(1) \Longrightarrow X &= (A_{11} - A_{12}\, A_{22}^{-1}\, A_{21})^{-1} \\ Y &= -\, XA_{12}\, A_{22}^{-1} \\ Z &= -\, A_{22}^{-1}\, A_{21}\, X \\ W &= A_{22}^{-1} - ZA_{12}\, A_{22}^{-1}\end{aligned}$$

இப்பொழுது, $A_{22} = 2$

$$\therefore \quad A_{22}^{-1} = \tfrac{1}{2}$$

எனவே, $X = \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \tfrac{1}{2} [\,1 \quad 1\,] \right]^{-1}$

$$= \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{\cdot}5 & 0{\cdot}5 \\ 1{\cdot}5 & 1{\cdot}5 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0{\cdot}5 & 1{\cdot}5 \\ 1{\cdot}5 & 0{\cdot}5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 0{\cdot}5 & -1{\cdot}5 \\ -1{\cdot}5 & 0{\cdot}5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad X = \begin{bmatrix} -0{\cdot}25 & 0{\cdot}75 \\ 0{\cdot}75 & 0{\cdot}25 \end{bmatrix}$$

$$Y = -X\, A_{12}\, A_{22}^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} -0{\cdot}25 & 0{\cdot}75 \\ 0{\cdot}75 & -0{\cdot}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \tfrac{1}{2}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \tfrac{1}{2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z = -\, A_{22}^{-1}\, A_{21}\, X = -\tfrac{1}{2}\, [\,1 \quad 1\,] \begin{bmatrix} -0{\cdot}25 & 0{\cdot}75 \\ 0{\cdot}75 & -0{\cdot}25 \end{bmatrix}$$

$$= -[0{\cdot}5 \quad 0{\cdot}5] \begin{bmatrix} -0{\cdot}25 & 0{\cdot}75 \\ 0{\cdot}75 & -0{\cdot}25 \end{bmatrix}$$

$$\therefore Z = -[0{\cdot}25 \quad 0{\cdot}25]$$

$$W = A_{22}^{-1} - Z A_{12} A_{22}^{-1}$$

$$= \tfrac{1}{2} - [-0{\cdot}25 \quad -0{\cdot}25] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \tfrac{1}{2}$$

$$= 0{\cdot}50 - [-1\ 00]\ \tfrac{1}{2}$$

$$= 0{\cdot}50 + 0{\cdot}50 = 1{\cdot}00$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{\cdot}25 & 0{\cdot}75 & -1 \\ 0{\cdot}75 & -0{\cdot}25 & 0 \\ -0{\cdot}25 & -0{\cdot}25 & 1 \end{bmatrix}$$

குறிப்பு (i):

A, B, C, G, F, H, O, ஆகிய அணிகள் ஒரே தரத்தைப் பெறுமல் சிறப்பற்ற சதுர அணிகளாயிருந்தால்,

$$\begin{bmatrix} A & H & G \\ 0 & B & F \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}HB^{-1} & (A^{-1}HB^{-1}FC^{1} - A^{-1}GC^{-1}) \\ 0 & B^{-1} & -B^{-1}FC^{-1} \\ 0 & 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$$

என்பது உண்மையாகும்.

(ii) $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,$ $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

சிறப்பற்ற சதுர அணி எனில், இதன் நேர் எதிர் அணி

$$= \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{bmatrix}$$ ஆகும்.

(iii) $AB + A + I = 0$ என்றும் A சிறப்பற்ற சதுர அணி என்றும் கொண்டால், $A^{-1} = -I - B$ ஆகும்.

(iv) $ab \neq 0$ எனில், $\begin{bmatrix} a & h \\ 0 & b \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} & a^{-1}\, b^{-1}\, h \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix}$ ஆகும்.

(v) A சிறப்பற்ற சதுர அணி என்க. தொடக்கத்திற்குரிய உருவ மாற்றத்தால் $\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}$ ஆனது $\begin{bmatrix} P & I \\ O & Q \end{bmatrix}$ என்று மாற்றப்பட்டால் $A^{-1} = QP$ ஆகும்.

மாதிரி :

சேர்ப்பு, $B = A$, $|P|\, 1 = |Q|$ எனில்,

சேர்ப்பு, $(Q^{-1}\, B\, P^{-1}) = PAQ$ என்பதை நிரூபி.

தெளிவாக,

சேர்ப்பு $(Q^{-1}\, B\, P^{-1})$ = சேர்ப்பு P^{-1} சேர்ப்பு B சேர்ப்பு Q^{-1}

= (சேர்ப்பு P^{-1}) A சேர்ப்பு Q^{-1}

இப்பொழுது,

$P^{-1} = \frac{1}{|P|}$ சேர்ப்பு P = சேர்ப்பு P ($\because |P| = 1$)

$\Longrightarrow (P^{-1})^{-1}$ = சேர்ப்பு P^{-1} அல்லது சேர்ப்பு $P^{-1} = P$

இதேபோன்று சேர்ப்பு $Q^{-1} = Q$

எனவே, சேர்ப்பு $(Q^{-1}\, BP^{-1}) = PAQ$ என்பதைக் காண்கிறோம்.

மாதிரி :

A, B என்ற இரு சிறப்பற்ற சமச்சீர் அணிகள் பெருக்கலுக்கு மாற்று விதியைப் பின்பற்றினால் $A^{-1}\, B$, $A^{-1}\, B^{-1}$ ஆகியவை சமச்சீராக இருக்கும் என்பதை நிறுவுக.

$$(A^{-1}\, B)^T = B^T (A^{-1})^T$$

$$= B^T (A^T)^{-1}$$

$= B\, A^{-1}$ (A, B ஆகியவை சமச்சீர் அணிகள் என்பதால்)

$\{AB = BA$ என்பதால்,

$$A^{-1}AB = A^{-1}BA$$

அல்லது $BA^{-1} = (A^{-1}B)AA^{-1} = A^{-1}B\}$

எனவே,

$A^{-1}B$ சமச்சீருடையது என்பதை நிரூபிக்கிறோம்.

மேலும்,

$$\begin{aligned}(A^{-1}B^{-1})^T &= (B^{-1})^T(A^{-1})^T\\ &= (B^T)^{-1}(A^T)^{-1}\\ &= B^{-1}A^{-1}\\ &= (AB)^{-1}\\ &= (BA)^{-1} \quad (\because A, B \text{ ஆகியவை மாற்று விதியைப் பின்பற்றுவதால்}).\\ &= A^{-1}B^{-1}\end{aligned}$$

எனவே, $A^{-1}B^{-1}$ சமச்சீருடையது என்று நிரூபிக்கிறோம்.

பயிற்சி 4

1. A, D என்ற அணிகள் m, n ஆகிய தரங்களைப் பெற்ற, சிறப்பற்ற அணிகளாவும், B என்ற அணி $m \times n$ தரத்தைப் பெற்ற அணிகளாகவும் இருந்தால்,

$$\begin{aligned}(A+BDB^T)^{-1} &= A^{-1}-A^{-1}B(B^TA^{-1}B+D^{-1})^{-1}B^TA^{-1}\\ &= A^{-1}-A^{-1}BEB^TA^{-1}+A^{-1}BE(E+D)^{-1}\\ &\quad EB(A^T)^{-1}\end{aligned}$$

என்பதை நிரூபி.

இதில், $E = (B^TA^{-1}B)^{-1}$.

2. $\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = |A|\,|D-BA^{-1}C|$ என்பதை நிரூபி.

இதில், A, D ஆகியவை சதுர அணிகளாகும் (வெவ்வேறு தரத்தைப் பெற்றனவாகவும் இருக்கலாம்). மேலும், A என்பது சிறப்பற்ற அணியாகும்.

[குறிப்பு :

$\begin{vmatrix} I & 0 \\ -BA^{-1} & I \end{vmatrix}$ என்ற அலகு மதிப்பைப்பெற்ற அணிக் கோவையால், கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிக்கோவையுடன் முன் பெருக்கினல்,

$$\begin{vmatrix} I & 0 \\ -BA^{-1} & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & D-BA^{-1}C \end{vmatrix}$$
$$= |A| \, |D-BA^{-1}.C|$$

என்று கிடைக்கிறது]

3. U என்ற அணியின் மூலகங்கள் ஒருமையாகவும் (unity), V என்ற நிரல் வெக்டரின் மூலகங்கள் ஒருமையாகவும் இருந்தால்,

$$|A+cU| = |A| + cV^T \text{(சேர்ப்பு A)}V,$$

$$V^T \text{ சேர்ப்பு } (A+cU) = V^T \text{ சேர்ப்பு } A$$

$$[\text{சேர்ப்பு } (A+cU)]V = (\text{சேர்ப்பு } A)V$$ என்பதை நிரூபி.

4. A என்பது சிறப்பற்ற அணி என்றும், U, V ஆகிய அணிகளை, இரு நிரல் வெக்டர்கள் என்றும் கொண்டால்,

$$(A+U\ V^T)^{-1} = A^{-1} - \left\{ \frac{(A^{-1}U)(V^T A^{-1})}{1+V^T A^{-1} U} \right\}$$

என்பதை நிரூபி.

5. கொடுக்கப்பட்ட H என்ற சிறப்பற்ற சதுர அணியை $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ என்று A, D ஆகியவை சதுர அணிகளாக இருக்கு மாறு பாகுபடுத்தினல், $H^{-1} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}$ என்பதை நிரூபி.

இதில், $X=(A-BD^{-1}C)^{-1}$, $Y=-A^{-1}BW$, $Z=-D^{-1}CX$
$W=(D-CA^{-1}B)^{-1}$ ஆகும்.

6. $|A| \pm 0$, $AB = AC$ எனில், $B=C$ என்பதை நிரூபித்து,

(i) சேர்ப்பு (AB) = (சேர்ப்பு B) (சேர்ப்பு A)

(i) சேர்ப்பு (A^T) = (சேர்ப்பு $A)^T$

(ii) சேர்ப்பு (A^*) = (சேர்ப்பு $A)^*$ என்பதை நிறுவுக.

7. (i) ஓர் அணிக்கு, நேரெதிர் அணி நிலைத்திருப்பதற்கான நிபந்தனைகளை வரையறுக்கவும்.

(ii) A என்பது சிறப்பற்ற சதுர அணி எனில்,

$$A^{-1} = \frac{\text{சேர்ப்பு } A}{|A|}$$ என்பதை நிறுவுக.

8. கீழ்க்காணும் அணிகளின் நேரெதிர் அணிகளைக் காண்க.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(viii) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & -\sin\beta & \cos\beta \\ 0 & 0 & \cos r & \sin r \\ 0 & 0 & -\sin r & \cos r \end{bmatrix}$

(ix) $\begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{bmatrix}$; இதில் $a^2+b^2+c^2+d^2=1$

(x) $$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

9. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ எனில், $A^2 - 5A + 7I = 0$ என்பதை, நிறுவிய பின்பு, A^{-1}-ஐக் காண்க.

10. D = மூலைவிட்ட அணி $[d_1, d_2, \ldots\ldots d_n]$; $d_i \neq 0$ $\forall\ i = 1, 2, \ldots\ldots n$ எனில், $D^{-1} = [d_1^{-1}, d_2^{-1}, \ldots\ldots, d_n^{-1}]$ என்பதை நிறுவுக.

11. காஸ் - ஜோர்டான் (Gauss Jordan) முறையின்மூலம் $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$-ன் நேர்எதிர் அணியைக் காண்க.

12. சுழற்சித்தானம் (pivoting) செய்து காஸ் - ஜோர்டான் முறையின்மூலம் $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் நேர் எதிர் அணியைக் காண்க.

13. கீழ்க்காணும் அணியைத் தகுந்த முறையில் பாகுபடுத்தி அதன் நேர் எதிர் அணியைக் காண்க.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

14. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தோராய நேர் எதிர் அணி,

$$\begin{bmatrix} 0{\cdot}39 & 0{\cdot}39 & -0{\cdot}58 \\ -0{\cdot}58 & 0{\cdot}39 & 0{\cdot}58 \\ 0{\cdot}39 & -0{\cdot}58 & -0{\cdot}39 \end{bmatrix}$$ எனில், துல்லியமான நேர் எதிர் அணியைக் காண்க.

15. $AB = BA$, $S^2 = B$ எனில், பிறகு $(A^{-1} SA)^2 = B$ என்பதை நிறுவுக.

16. A, B ஆகிய அணிகள் $(n \times n)$ தரத்தைப் பெற்ற சிறப்பற்ற அணிகளென்றால், பிரதி (BAB^{-1}) = பிரதி (A) என்பதை நிறுவுக.

17. A என்ற ஒரு சதுர அணியானது, $1 + A + A^2 + \dots \dots + A^k = 0$ என்ற தொடர்பைத் திருப்தி செய்தால், $A^{-1} = A^k$ என்பதை நிறுவுக.

18. A என்பது சதுர அணியாகவும், λ, μ ஆகியவைகள் சிக்கல் எண்கள் என்றும், $A\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$, $A\mu = (\mu I - A)^{-1}$ என்றும் கொண்டால், பிறகு $(\lambda - \mu)\, A\lambda\, A\mu = A\mu - A\lambda$ என்பதை நிறுவுக.

(குறிப்பு:

$A\lambda^{-1}\,(A_\mu - A\lambda)\,A_\mu^{-1} = A_\lambda^{-1} - A_\mu^{-1}$ என்று பயன்படுத்தவும்).

19. A ஆனது சதுர அணியாகவும் $A^k = 0$ என்றும் (k என்பது நேர்முழு எண் எனில்) இருந்தால் $(I - A)$ ஆனது சிறப்பற்றது என்பதை நிரூபி.

20. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ எனில், A அணியைக் காண்க.

21. ஒரு சதுர சிறப்பற்ற அணியின் ஒவ்வொரு நிரையின் (நிரலின்) மூலகங்களின் கூடுதல் K $(K \neq 0)$ எனில், பிறகு அதன் நேர் எதிர் அணியின் ஒவ்வொரு நிரையின் (நிரலின்) மூலகங்களின் கூடுதல் K^{-1} என்பதை நிறுவுக.

குறிப்பு :

A என்பது $n \times n$ தரத்தைப்பெற்ற சிறப்பற்ற அணி என்க.

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$ என்பது $(n \times 1)$ தரத்தைப் பெற்ற நிரல் அணி

எனில், $$AB = \begin{bmatrix} K \\ K \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} = KB$$

எனவே,

$B = KA^{-1}B$ அல்லது $K^{-1}B = A^{-1}B$. i.e; $$\begin{bmatrix} K^{-1} \\ K^{-1} \\ \vdots \\ K^{-1} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

22. $(A_1 A_2 \ldots\ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \ldots\ldots\ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$ என்ற தொடர்பைப் பயன்படுத்தி,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} abc \neq 0$$

என்ற பெருக்கல் அணிகளின் நேர் எதிர் அணியை முதலில் பெருக்காமல் காண்க.

23. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$,

B = சேர்ப்பு A எனில்,

பிறகு, $|AB + KI_n| = (|A| + K)^n$ என்பதை நிறுவுக.

இதில் K என்பது ஒரு திசையிலி (scalar) ஆகும்.

24. A என்பது சதுர அணி ஆகும். மேலும்,

சேர்ப்பு $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -6 & 9 & -1 \\ 8 & -12 & 2 \end{bmatrix}$ எனில், A-ஐக் காண்க.

5. ஒருபடிச் சமன்பாடுகள்
(Linear Equations)

$AX = B$ ......(5·1) என்ற வடிவத்தில் அமைந்துள்ள ஒருங்கமை ஒருபடிச் சமன்பாடுகளை (set of linear equations) கருத்தில் கொள்வோம். இதில் A என்பது ஒரு சதுர அணியாகும். X-ம், B-ம் ஒரே தரத்தைப் (order) பெற்ற வெக்டர்களாகும். இச் சமன்பாடுகளில் B, பூஜ்ஜிய வெக்டராக இருப்பது ஒருவகை (அதாவது $B = 0$), B, பூஜ்ஜிய வெக்டராக இல்லாமலிருப்பது இன்னொரு வகை (அதாவது $B \neq 0$). $B = 0$ எனில், இச் சமன்பாடுகளைச் சமபடித் தானவை (homogeneous) என்று கூறுகிறோம். $B \neq 0$ எனில், இச் சமன்பாடுகளை ஒரினமற்றவை என்று கூறுகிறோம்.

5-A சமபடித்தான சமன்பாடுகள் (Homogeneous equations)

ஒருங்கமை சமபடித்தான சமன்பாடுகளை $AX = 0$ ......(5·2) என்று எழுதுவது வழக்கம். தெளிவாக $X = 0$ என்ற தீர்வு இங்கு நிலைத்திருக்கிறது. இத் தீர்வைத் திரணமுள்ள (trivial) தீர்வு என்கிறோம். இப்பொழுது மற்ற திரணமல்லாத தீர்வுகளை (non-trivial), அவை நிலைத்திருந்தால் (if they exist), அவற்றைக் காணவேண்டும். திரணமல்லாத தீர்வுகள் நிலைத்திருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

உதாரணமாக,

ஒருங்கமை சமன்பாடுகளான, $x + y = 0$,

$x = 2y = 0$

ஆகியவை $x = 0, y = 0$ என்ற தீர்வுகளை மட்டும்தான் பெற்றுள்ளன. திரணமில்லாத தீர்வு நிலைத்திருந்தால், அஃது ஒப்பற்ற முறையில் (unique) நிலைத்திருக்க முடியாது. X_1 என்பது, அம்மாதிரியான தீர்வு எனில், $AX_1 = 0$.

இச் சமன்பாட்டைப் பூஜ்ஜியமற்ற திசையிலியான (non-zero-scalar) λ ஆல் பெருக்கினால்,

$$\lambda AX_1 = A(\lambda X_1) = 0$$

இதிலிருந்து λX_1-ம் மூலச் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு என்பது தெரிகிறது. எனவே, (5·2)-ன் திரணமல்லாத தீர்வின் நிலைபாடு A அணியைச் சார்ந்துள்ளது. இப்பொழுது A சிறப்பற்ற அணி என்றிருக்கும் வகையை (case) கவனிப்போம். இவ்வகைக்கு A-ன் நேர் எதிர் அணியான A^{-1} நிலைத்திருக்கும்.

எனவே, (5·2)ஐ A^{-1}ஆல் முன் பெருக்கினுல்,

$$A^{-1}AX = IX = X = 0 \quad \text{அல்லது} \quad X = 0$$

அதனுல், A சிறப்பற்ற அணியாக இருந்தால், திரணமல்லாத தீர்வுகள் நிலைத்திருக்கா. எனவே, திரணமல்லாத தீர்வுகளின் நிலைபாட்டிற்கு Aஐச் சிறப்பு அணியாகக் (singular matrix) கருத வேண்டும். A சிறப்பு அணியாக இருந்து, அதனுல் $|A| = 0$ என்றிருக்கும்போது திரணமல்லாத தீர்வுகள் எப்பொழுதும் நிலைத் திருக்கும் என்று நிறுவ முடியும். இங்கு நமக்கு நிருபணம் தேவை யில்லை. A சிறப்பற்ற அணியானுல், குறைந்தது ஒரு நிரையாவது மற்ற நிரைகளைச் சார்ந்திருக்கும். அதனுல் குறைந்தது, மூலச் சமன்பாடுகளின் ஒரு சமன்பாடாவது எந்த விதமான தகவலையும் (information) பெற்றிருக்காது. இச் சமன்பாட்டை நீக்குவதால் பெறக்கூடிய தகவல் எந்த விதத்திலும் மாற்றப்படுவதில்லை. தெரியாதவற்றில் (unknown) ஏதோ ஒன்றிற்கு யாதாமொரு (arbitrary) மதிப்பைக் கொடுப்பதால் ஓரினமற்ற (non-homogenous) சமன்பாடுகளாகின்றன. இவற்றுக்குத் தீர்வு காண முடியும். தெரியாதவற்றில் ஏதோ ஒன்றிற்கு யாதாமொரு மதிப்புக் கொடுப்பதால், காணும் தீர்வு ஒப்பற்ற (non-unique) தீர்வாக அமையும்.

எனவே, மேலுள்ள வாதங்களினுல், ஒரு படிச் சார்பு வெக்டர் களைப் (linear dependence vectors) பற்றி வரையறுக்க வேண்டிய அவசியம் ஏற்பட்டுள்ளது.

5-B ஒருபடிச்சார்பு (Linear Dependence)

$c_1, c_2 \ldots\ldots c_m$ என்ற திசையிலிகள் (scalars). அவை யாவுமே பூஜ்ஜியமில்லாமல் இருக்கும்படி காண முடிந்து, ஒரே தரத்தைப் (order) பெற்ற வெக்டர்களான,

$$X_1, X_2, \ldots, X_m \text{ஐ}$$

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots\ldots + c_m X_m = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5\cdot3)$$

என்றிருக்குமாறு காண முடிந்தால் அவ் வெக்டர்களை ஒருபடிச்

சார்புடையது என்று கூறுகிறோம். அந் திசையிலிகளைக் (scalars) காண முடியவில்லை எனில், அவ்வெக்டர்களை ஒருபடிச் சார்பற்றது (linearly independent) என்று கூறுகிறோம்.

n என்ற தரத்தைப் பெற்ற $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ என்ற n வெக்டர்களைக் கருதுவோம். $c_1, c_2, \ldots\ldots c_n$ என்ற திசையிலிகளைக் காண முடிந்து,

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots\ldots\ldots + c_n X_n = 0 \ldots\ldots \quad (5\cdot4)$$

என்றிருந்தால், அவ் வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்புடையனவாகும்.

ஆனல், (5·4) ஐ $AC = 0$ .... (5·5)

என்று எழுதலாம். இதில் A என்பது, சதுர அணியாகும். இதன் நிரல்கள்

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ என்ற வெக்டர்களாகும்.

C என்பது $c_1, c_2, c_n \ldots\ldots c_n$ என்ற மூலகங்களைப் பெற்ற வெக்டர் ஆகும்.

(5.5) லுள்ள சமன்பாடு சமபடித்தான ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் (set of equations) என்பதால், திரணமல்லாத தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும். அதாவது, c-ன் பூஜ்ஜியமற்ற மதிப்புகளுக்கு $|A| = 0$. இவ்வாருக, வெக்டர்களை நிரல்களாகக் கொண்ட அணிக்கோவையின் மதிப்புப் பூச்சியமானல்,

$$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$$

என்ற வெக்டர்கள் சார்புடைய கணமாக அமைகின்றன. இல்லையேல் அவ் வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றனவாகும்.

n தரத்தைப் பெற்ற $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ என்ற சார்பற்ற வெக்டர்களைக் கருதுக. பிறகு, A என்பது, $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n$ ஆகிய வெக்டர்களை நிரல்களாகக் கொண்டு பிறப்பிக்கப்பட்ட (generated) அணியாயின், A சிறப்பற்ற அணியாக, A^{-1}-ஐப் பெற்று அமையும். இப்பொழுது, Y என்பது, n தரத்தைப் பெற்ற ஏதோ ஒரு வெக்டர் என்க.

A^{-1} நிலைத்துள்ளதால், $A^{-1}Y$-ம் நிலைத்திருக்கும்.

உண்மையில், $A^{-1}Y = C$ (5·6)

இங்கு C என்பது, n தரத்தைப் பெற்ற ஏதோ ஒரு வெக்டர் ஆகும்.

(5·6)-லிருந்து $Y = AC$ எனப் பெறுகிறோம்.

அதாவது, $Y = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots\ldots + C_n X_n$ …… (5·7)
அல்லது,

$$Y \text{ ஆனது}, X_1\ X_2 \ldots\ldots\ldots X_n$$

என்ற வெக்டர்களைச் சார்ந்துள்ளது.

எனவே, n தரத்தைப் பெற்ற n வெக்டர்கள் மட்டுமே ஒருபடிச் சார்புடையனவாக இருக்க முடியும் என்பதை அறிகிறோம்.

மாதிரி:

X_1, X_2, X_3 ஆகிய வெக்டர்கள் கீழ்வருமாறு அமைந்துள்ளன.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

இவை ஒருபடிச் சார்பற்றனவாக (linearly independent) அமைந்துள்ளன என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

$$Y = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ 81 \end{pmatrix} \text{ஐ}, X_1, X_2, X_3 \text{ ஆகியவற்றின்மூலம்}$$

அமைக்கவும்.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -27 \neq 0$$

எனவே, X_1, X_2, X_3 ஆகியவை ஒரு சார்பற்றனவாக அமைகின்றன.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}\ Y = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 21 \\ -3 \end{bmatrix}$$

எனவே,

$$Y = A\begin{bmatrix} 18 \\ 21 \\ -3 \end{bmatrix} = [X_1 \ X_2 \ X_3]\begin{bmatrix} 18 \\ 21 \\ -3 \end{bmatrix} = 18X_1 + 21X_2 - 3X_3$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 81 \end{bmatrix} = 18X_1 + 21X_2 - 3X_3$$

$$= 18\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 21\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

தேற்றம் : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ என்ற அணியின் தரம் $r < n$ எனில், $AX = 0$ என்ற ஒருங்கமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் $(n-r)$ ஒருபடிச் சார்பற்ற (linearly independent) தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

நிரூபணம் : அணி A-ன் தரம் r என்பதால், இவ்வணி r ஒருபடிச் சார்பற்ற நிரல்களைப் பெற்றிருக்கும். பொதுத்தன்மையை இழக்காமல் (without loss of generality), A அணியின் இடப்புறத்திலிருந்து முதல் r நிரல்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றனவாகக் கொள்ளலாம்.

$$A = [C_1 \ C_2 \ \ldots\ldots \ C_n] \text{ என்க.}$$

இதில் $C_1, C_2 \ldots\ldots C_n$ என்பது, A அணியின் நிரல் வெக்டர்களாகும். ஒவ்வொன்றிலும் மூலகங்கள் இருக்கும்.

இப்பொழுது, $AX = 0$ என்பது,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ என்பதால்,}$$

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \ldots\ldots + x_n C_n = 0 \qquad \ldots\ldots (5\cdot7)$$

என்றவாறு அமையும்.

$C_{r+1}, C_{r+2} \ldots\ldots C_n$ ஆகியவற்றில் ஒவ்வொரு நிரல் வெக்டரும், $C_1, C_2 \ldots\ldots C_r$ ஆகியவற்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக (linear combination) அமையும்.

எனவே,

$$\left.\begin{array}{l} C_{r+1} = p_{11}C_1 + p_{12}C_2 + \ldots\ldots + p_{1r}C_r \\ C_{r+2} = p_{21}C_1 + p_{22}C_2 + \ldots\ldots + p_{2r}C_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n = pk_1 C_1 + p_{k2}C_2 + \ldots\ldots + p_{kr}C_r \end{array}\right\} \quad \ldots (5\cdot8)$$

இங்கு, $K = n - r$ ஆகும்.

(5·7) ஐயும் (5·8) ஐயும் ஒத்துப் பார்த்தால்,

$$X_1 = \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ \vdots \\ P_{1r} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} P_{21} \\ P_{22} \\ \vdots \\ P_{2r} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots\ldots X_{n-r} = \begin{bmatrix} P_{k1} \\ P_{k2} \\ \vdots \\ P_{kr} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}$$

என்ற வெக்டர்களை $AX = 0$-ன் $(n-r)$ தீர்வுகளாகப் பெறுகிறோம். $m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots\ldots + m_{n-r}\, x_{n-r} = 0$ என்ற தொடர்பைப் பெற்றால், இந்த $(n-r)$ தீர்வுகள் ஒருபடிச் சார்பற்றனவாக அமைந்துள்ளன எனலாம்.

மேலுள்ள தீர்வுகள் சார்பற்றன எனில், இடப்புறமுள்ள வெக்டர்களின் $(r+1)$ஆம் .... nஆம் மூலகங்களை ஒத்துப் பார்த்தால், $m_1 = 0, m_2 = 0 \ldots\ldots m_{n-r} = 0$ என்று காண்கிறோம். இதனால், மேலுள்ள தீர்வுகள் ஒருபடிச் சார்பற்றன என்று தெரிகிறது.

இப்பொழுது, $AX = 0$-ன் ஒவ்வொரு தீர்வும் $(n-r)$ தீர்வுகளின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக (linear combination) இருப்பதை நிறுவுவோம். X என்ற வெக்டர் $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்ற மூலகங்களைப் பெற்று $AX = 0$-ன் தீர்வாக அமையட்டும்.

பிறகு, $X + x_{r+1}X_1 + x_{r+2}X_2 + \ldots\ldots + x_n X_{n-r}$ ...... (5·8) என்ற வெக்டர் $AX = 0$-ன் ஒரு தீர்வாகும். எனவே, இவை தீர்வுகளின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக அமைந்துள்ளன.

(5·8) ன் கடைசி $(n-r)$ உறுப்புகளும் பூச்சியமாகும்.

(5.8)-ன் முதல் r உறுப்புகள் $z_1, z_2, \ldots\ldots z_r$ என்றிருக்கட்டும்.

பிறகு, z வெக்டர், $z_1, z_2, \ldots\ldots z_r, 0, 0, \ldots\ldots\ldots 0$

என்ற மூலகங்களைப் பெற்று AX = 0 ஐத் திருப்தி செய்கிறது.

எனவே, (5·7)-லிருந்து,

$$z_1 c_1 + z_2 c_2 + \ldots\ldots + z_r c_r = 0$$

ஆனல், $c_1, c_2 \ldots\ldots c_r$ ஆகியவை ஒருபடிச் சார்பற்றவை.

எனவே, $z_1 = z_2 = \ldots\ldots = z_r = 0$.

எனவே, (5·8)-லுள்ளது பூச்சிய வெக்டராகும்.

இவ்வாருக,

$$X_1 = -X_{r+1} \quad X_1 - X_{r+2} \quad X_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots - X_n \quad X_{n-r}$$

என்ற ஒவ்வொரு தீர்வும் $(n-r)$ ஒருபடிச் சார்பற்ற (linearly independent) $X_1, X_2 \ldots\ldots\ldots X_{n-r}$ தீர்வுகளைப் பெற்று ஒருபடிச் சேர்க்கையாக (linear combination) அமைகிறது.

குறிப்பு : A என்ற அணியின் மதிப்பிடமான $r < n$ எனில், AX = 0 என்ற ஒருங்கமை சார்புகள் பூச்சியமற்ற ஒருபடிச் சார்பற்ற ஒருங்கமை தீர்வுகளைப் பெற்று அமையும். $r = n$ எனில், ஒருபடிச் சார்பற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிரா.

தேற்றம் : $m \times n$ தரத்தைப் பெற்ற A அணியின் மதிப்பிடம் r எனில், P என்ற சிறப்பற்ற அணி $PA = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$ என்றிருக்குமாறு நிலைத்திருக்கும். இதில் $r \times n$ தரத்தைப் பெற்ற அணியான G-ன் மதிப்பிடம் r ஆகும். 0 என்பது $(n-r) \times n$ தரத்தைப் பெற்ற அணியாகும்.

நிரூபணம் : $m \times n$ தரத்தைப் பெற்ற A அணியின் மதிப்பிடம் r என்பதால், P, Q என்ற சிறப்பற்ற அணிகள்

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (5\cdot9)$$

என்றவாறு அமையும்.

ஒவ்வொரு சிறப்பற்ற அணியையும் தொடக்க அணிகளின் (elementary matrices) பெருக்கல்களாக அமைக்க முடியும் என்பதால், $Q = Q_1, Q_2, \ldots\ldots\ldots Q_t$ என்றிருக்கட்டும். இதில்

$Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_t$ ஆகியவை தொடக்க அணிகளாகும், எனவே, (5·9)-ஐ

$$PAQ_1 Q_2 \ldots\ldots Q_t = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (5\cdot10)$$

என்று எழுதலாம்.

இப்பொழுது, அடுத்தடுத்து (5·10)-ன் இடப்புறத்தில் $Q_t^{-1} \ldots\ldots Q_2^{-1}$, Q_1^{-1} ஆகியவற்றால் பின் பெருக்கல் செய்து, அதற்கேற்றவாறு வலப்புறத்தில் நிரல் மாற்றங்களைச் செய்வோம். n நிரல் மாற்றங்கள் கடைசி $(m-r)$ பூச்சிய நிரைகளை மட்டும் பாதிப்பதால், $PA = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$ என்ற தொடர்பைப் பெறுகிறோம். தொடக்கத்திற்குரிய மாற்றங்கள் மதிப்பிடத்தை மாற்றுவதில்லை என்பதால், PA-ன் அதாவது, $\begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$ ன் மதிப்பிடம் r ஆகும். எனவே, G-ன் மதிப்பிடம் r ஆகும்.

(5-C). AX = 0 சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காணும் முறை (Method of solution of the equation AX = 0).

$m \times n$ தரத்தைப் பெற்ற A அணியின் மதிப்பிடம் r என்க, மேலுள்ள தேற்றம்படி,

$$PA = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (5\cdot11)$$

என்றிருக்குமாறு P என்ற சிறப்பு அணி நிலைத்திருக்கும். இங்கு $r \times n$ தரத்தைப் பெற்ற G அணியின் மதிப்பிடம் r ஆகும்.

AX = 0–ஐ P ஆல் முன் பெருக்கல் செய்தால்,

$$PAX = PO = 0$$

அதாவது, $(PA) X = 0$

அல்லது, $\begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} X = 0 \quad \ldots\ldots \quad (5\cdot12)$

(5·11)-ன்படி, தொடக்கத்திற்குரிய மாற்றங்கள்மூலம் ஒவ்வோர் அணியையும் முக்கோண வடிவமாக ஒடுக்கமுடியும்.

எனவே, Q என்ற சிறப்பற்ற அணி, $Q \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$ ஆனது முக்கோண அணியாகக் கடைசி $(m-r)$ நிரைகள் பூஜ்ஜியமாக இருக்குமாறு நிலைத்திருக்கும்.

இப்பொழுது, (5·12)ஐ Qஆல் முன் பெருக்கல் செய்தால்

$$Q \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} X = 0$$

$$\text{அல்லது} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \cdots\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots a_{rr} \cdots a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots\cdots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ xn \end{bmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots\cdots + a_{1n} x_n = 0$$

$$a_{22} x_2 + \cdots\cdots + a_{2n} x_n = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{rr} x_r + \cdots\cdots + a_{rn} x_n = 0$$

இந்த r சமன்பாடுகளின் மூலம் x_3 $x_2 \ldots\ldots x_r$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை ஒருபடியாக (linearly) x_{r+1} , x_{r+2} , ... x_n மூலமாக அமைக்கமுடியும். இத் தொடர்பின்மூலம் தீர்வுகளைக் காண முடியும்.

5-D AX = 0 என்ற ஒருங்கமை சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் தன்மைகள்

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ என்ற அணியின் மதிப்பிடம் r என்க. பிறகு, $r \leqslant n$, AX = 0 என்ற ஒருங்கமை சமன்பாட்டைக் கருதுக.

வகை 1 : $r = n$ எனில், Ax = 0, ஆனது $(n-n)$ ஒருபடிச் சார்பற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும். அதாவது, ஒருபடிச் சார்பற்ற தீர்வுகளே இரா. இம் மாதிரியானவற்றில் பூச்சியம் மட்டுமே ஒரு தீர்வாகும்.

$$X = (x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) \text{ என்பது } n \text{ வெக்டர் எனில்,}$$

$$x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_n = 0 \text{ என்பது மட்டுமே ஒரு தீர்வாகும்.}$$

வகை 2 : $r < n$ எனில், AX = 0 ஆனது $n-r$ ஒருபடிச் சார்பற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும். எனவே, முடிவற்ற பல தீர்வுகள் இருக்கும்.

வகை 3 : $m < n$ எனில் (அதாவது சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கை, மாறிகளின் எண்ணிக்கையைவிடக் குறைந்திருந்தால்) $r \leqslant n$ என்றிருக்கும். அதனல் $r < n$. இது வகை 2-க்குச் சமம்.

மாதிரி : கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

$$\begin{aligned} 2w + 3x - y - z &= 0 \\ 4w - 6x - 2y + 2z &= 0 \\ -6w + 12x + 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

கொடுக்கப்பட்ட ஒருங்கமை சமன்பாடுகளுக்கு அணி வடிவம்

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & -6 & -2 & 2 \\ -6 & 12 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad (1)$$

ஆகும். அதாவது AX = 0.

$R_2 - 2R_1$, $R_3 + 3R_1$ என நிரை மாற்றங்கள் செய்தால்,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -12 & 0 & 4 \\ 0 & 21 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$R_3 + \frac{7}{4} R_2$ எனச் செய்தால்,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -12 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

A-ன் மதிப்பிடம் 2 என்பதால், (1) 4 − 2 = 2 ஒருபடிச் சார்பற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்

எனவே, (1) ஆனது,

$$\begin{aligned} 2w + 3x - y - z &= 0 \\ -12x + 4z &= 0 \end{aligned}$$

என்றவாறு அமைகிறது.

தீர்வு செய்தால், $z = 3x,\ y = 2w$

எனவே, (1)-க்கு $z = 3x$, $y = 2w$ என்ற பொதுத் தீர்வுகள் கிடைக்கின்றன. இதில் x, w ஆகியவை சராமாறி (parameter) யாகும்.

மாதிரி : கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்க.

$$\begin{aligned} 2x - 2y + 5z + 3w &= 0 \\ 4x - y + z + w &= 0 \\ 3x - 2y + 3z + 4w &= 0 \\ x - 3y + 7z + 6w &= 0 \end{aligned}$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அணிவடிவம் $AX = 0$ ஆகும். அதாவது,

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

முதல் நிரையையும், நான்காம் நிரையையும் இடம் மாற்றினால்,

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = 0$$

$R_2 - 4R_1$, $R_3 - 3R_1$, $R_4 - 2R_1$ என்று செயல் படுத்தினால்,

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 9 & 9 \\ 0 & 4 & -9 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = 0$$

$R_4 + R_3$, $R_3 - 4R_2$ என்று செயல்படுத்தினால்,

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = 0$$

இப்பொழுது, இவ் அணியின் மதிப்பிடம் 3 ஆகும்.

ஏனெனில், சிற்றணிக் கோவையின் தரம் (order) 3 ஆகும்.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

எனவே, A-ன் தரம் 3,

அதனால், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் $4 - 3 = 1$ ஒரு படிச் சார்பற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

இவ்வாறாக, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள்,

$$x - y + z + 6w = 0$$
$$-y + 4w = 0$$
$$9z - 7w = 0$$

இவற்றுக்குத் தீர்வு கண்டால் $z = 7/9\, w$, $y = 4w$

$$x = 7 . \frac{7}{9} w + 6w + (3)(4)w$$

$$= \frac{49}{9} w + 6w + 12w$$

$$= \frac{211}{9} w$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வு

$$x = \frac{211c}{9},\ y = 4c,\ z = \frac{7}{9} c,\ w = c$$

இங்கு, C ஆனது, சாராமாறி (parameter) ஆகும். அணியின் வடிவத்தில் தீர்வுகள்,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \frac{211}{9} \\ 4 \\ \frac{7}{9} \\ 1 \end{bmatrix}$$ ஆகும்.

5-E ஓரினமற்ற ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் (Non-homogneous linear equations) தீர்வுகளின் இசைவு நிபந்தனை (Condition for consistence)

ஓரினமற்ற ஒருபடிச் சமன்பாட்டைப்பற்றி நாம் முன்பே கண்டோம். AX = B என்ற ஒருங்கமை சமன்பாட்டில் A-ன் மதிப்பிடமும் [A, B] என்ற விளிம்பு கூட்டிய அணியின் (augmented matrix) மதிப்பிடமும் ஒத்திருந்தால், இச் சமன்பாடு தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

நிரூபணம் : A-ன் மதிப்பிடம் r எனவும் $C_1, C_2, C_3 \ldots \ldots C_n$ என்பவை A அணியின் நிரல் வெக்டர்கள் எனவும் கொண்டால்,

$$[C_1\ C_2\ \ldots\ C_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = B \quad \ldots\ldots \quad (5\cdot13)$$

$$\Longrightarrow AX = B$$

$$\text{i.e. } C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots\ldots + C_n x_n = B$$

வேண்டிய நிபந்தனை (Necessary condition): சமன்பாடுகளின் அமைப்பு இசைவு பெற்றதாக இருக்கட்டும். அதாவது தீர்வுகளைப் பெற்று $k_1, k_2 \ldots\ldots k_n$ என்ற அளவுகளை நிலைத்திருக்கும்படி.

$$B = k_1 c_1 + k_2 c_2 + \ldots\ldots + k_n c_n \quad \ldots \quad (5\cdot14)$$

என்றவாறு அமையும்.

A-ன் மதிப்பிடம் r என்பதால், (n − r) நிரல்களில் ஒவ்வொன்றும் (அதாவது, $c_{r+1}, c_{r+2} \ldots\ldots c_n$) $c_1, c_2, \ldots\ldots c_r$ ஆகியவற்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கையுடையதாக இருக்கும்.

(5·14)-லிருந்து Bஆனது $c_1, c_2, \ldots\ldots c_r$

ஆகியவற்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கையுடையது என்று தெரிகிறது.

(ஏனெனில், $c_{r+1}, c_{r+2} \ldots\ldots, c_n$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை (5·14)-ல் $C_1, C_2 \ldots C_r$ ஆகியவற்றின் மூலமாகப் பிரதியிட முடியும்).

எனவே, [A, B]-ன் மிக அதிகமான ஒருபடிச் சார்பற்ற நிரல்களின் எண்ணிக்கை r ஆகும்.

எனவே, [A, B] என்ற விளிம்பு கூட்டிய அணியின் மதிப்பிடம் r ஆகும்.

அதாவது, A-ன் மதிப்பிடமும் [A, B]-ன் மதிப்பிடமும் r என்றவாறு ஒத்துள்ளது.

போதிய நிபந்தனை (Sufficient condition): A, [A,B] ஆகிய அணிகளின் மதிப்பிடம் r என்க. பிறகு, r மதிப்பிடத்தைப் பெற்ற [A, B]-ன் ஒருபடிச் சார்பற்ற நிரல்களின் எண்ணிக்கை r ஆகும்.

ஆனல், [A, B]-ன் $c_1, c_2 \ldots\ldots c_r$ ஏற்கெனவே ஒருபடிச் சார்பற்ற கணமாக அமைந்துள்ளது.

எனவே, B அணியை $c_1, c_2 \ldots\ldots c_r$ ஆகிய நிரல்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக அமைத்தாகவேண்டும்.

இவ்வாறாக, $k_1, k_2 \ldots\ldots\ldots k_r$ என்ற r அளவைகள் $k_1 c_1 + k_2 c_2 + \ldots\ldots + k_r c_r + 0\, c_{r+1} + 0\, c_{r+2} + \ldots\ldots + 0\, c_n = 13$ என்றவாறு அமைகிறது. ...... (5·15)

(5·13)ஐயும் (5·15)ஐயும் ஒத்துப் பார்த்தால் AX = B-க்கான $x_1 = k_1, x_2 = k_2 \ldots\ldots x_r = k_r, x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 0 \ldots\ldots x_n = 0$ என்ற தீர்வுகள் கிடைக்கின்றன.

5-F ஓரினமற்ற ஒருபடிச் சமன்பாடுகளுக்குப் பொதுத் தீர்வைக் காணும் முறை (General method of solving non-homogeneous linear equations)

AX = B என்ற சமன்பாடுகளின் அமைப்பு இசைவுடையதாக (consistent) இருக்கட்டும்.

X = X0 என்பது, AX = B-ன் நிலையான தீர்வு என்க
மேலும், $x = x_1$ என்பது இச் சார்பின் மற்றொரு தீர்வு என்க.

பிறகு,
$$AX_0 = B$$
$$AX_1 = B$$

அல்லது, $A(X_1 - X_0) = 0$

இது $(X_1 - X_0)$ என்பது AX = 0 என்ற துணைச் சமன்பாட்டின் (Auxiliary equation) தீர்வாகக் காணப்படுகிறது.

இப்பொழுது AX = 0 என்பது. ஒருபடிச் சமபடித்தமான (linear homogeneous) சமன்பாடுகளாகும்.

A-ன் மதிப்பிடம் r எனில், துணைச்சமன்பாடான $Ax = 0$ ஆனது, $(n-r)$ ஒருபடிச் சார்பற்ற $x_1, x_2 \ldots\ldots x_{n-r}$ தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

பிறகு, $X_1 - X_0 = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots + k_{n-r} x_{n-r}$

அல்லது, $X_1 = X_0 + k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots + k_{n-r} x_{n-r}$

இங்கு, $k_1, k_2 \ldots\ldots\ldots k_{n-r}$ என்பது யாதாமொரு நிலையெண்ணாகும் (constants).

தேற்றம் : A என்பது, n நிரைகளைப் பெற்ற சதுர அணியாகவும், X என்பது, $n \times 1$ தரத்தைப் பெற்ற அணியாகவும், B என்பது $n \times 1$ தரத்தைப் பெற்ற அணியாகவும் இருந்தால், AX = B என்ற ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் A ஆனது சிறப்பற்றதாயிருந்தால், ஒப்பற்ற தீர்வுகளைப் (unique solution) பெற்றிருக்கும்.

நிரூபணம் :

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} \; ; \quad |A| \neq 0$$

எனில், Aன் மதிப்பிடமும் [A, B]-ன் மதிப்பிடமும் n ஆகும்.

எனவே, AX = B இசைந்த சமன்பாடுகளாகும் (consistent equations).

இச் சமன்பாட்டை A^{-1} ஆல் முன் பெருக்கினல்

$$A^{-1} AX = A^{-1} B$$

அல்லது, $$IX = A^{-1} B$$

அல்லது $X = A^{-1} B$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வாகும்.

தீர்வு தன்னிகரற்றது என்பதை நிரூபிக்க X_1 X_2 என்பவற்றை AX = B-ன் தீர்வுகளாகக் கருதவும்.

பிறகு, $$AX_1 = B, \quad AX_2 = B$$

$$\Longrightarrow AX_1 = AX_2$$

$$\Longrightarrow A^{-1} (AX_1) = A^{-1} (AX_2)$$

$$\Longrightarrow (A^{-1}A) \; X_1 = (A^{-1}A) \; X_2$$

$$\Longrightarrow I X_1 = I X_2$$

$$\Longrightarrow X_1 = X_2$$

எனவே, தீர்வுகள் தன்னிகரற்றது என்று தெரிகிறது.

5-G ஓரினமற்ற ஒருங்கமை சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காணும் வழிமுறைகள் (Working rule to find the solutions of set of non-homogeneous equations)

$AX = B$ என்ற ஒருங்கமை சமன்பாட்டில் $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ எனில், விளிம்பு கட்டிய அணியான $[A,B]$ஐ முக்கோண அணியாகத் தொடக்கத்திற்குரிய நிரை மாற்றங்களைச் செய்து அமைக்கிறோம். இம் முக்கோண அணியிலிருந்து $[A,B]$-ன் மதிப்பிடத்தையும், A-ன் மதிப்பிடத்தையும் காண்கிறோம். இங்குக் கீழ்க்காணும் வகைகளைக் காண வேண்டியுள்ளது.

வகை 1 : A-ன் மதிப்பிடம் < [A, B]-ன் மதிப்பிடம் எனில், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள், தீர்வுக்காக இசைவற்றதாக (inconsistent) உள்ளது என்கிறோம்.

வகை 2 : மதிப்பிடம் A = மதிப்பிடம் [A, B] = r எனில், சமன்பாடுகள் இசைவுடைய தீர்வுகளைப் (consistent solutions) பெற்றுள்ளது என்கிறோம்.

$r < n$ எனில், முக்கோண அணியைக் காணும் தருணத்தில் $(m-r)$ சார்புகள் நீக்கப்படுகின்றன. அதாவது, $(m-r)$ நிரைகள் பூச்சியமாகின்றன. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சார்புகளை அவற்றுக்கு ஒத்தனவாயுள்ள r சமன்பாடுகளைப் பதிலிடுகிறோம் (replaced). இந்த r சமன்பாடுகளிலிருந்து r தெரியாதவற்றின் மதிப்புகளை மீதியுள்ள $(n-r)$ தெரியாதவற்றின் மூலமாக யாதாமொரு மதிப்பைக் கொடுத்துக் காண்கிறோம்.

(i) $r = n$ எனில் தன்னிகரற்ற தீர்வுகள் இருக்கும்.

(ii) $r < n$ எனில், $(n - r)$ மாறிகளுக்கு யாதாமொரு மதிப்புகளைக் கொடுத்து முடிவில்லா எண்ணிக்கையில் தீர்வுகளைக் காண்கிறோம். இவற்றில், $n - r + 1$ தீர்வுகள் ஒருபடிச் சார்பற்றனவாகவும், மற்றவை அவற்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக (linear combination) அமையும்.

(iii) $m < n$, $r \leqslant m < n$ எனில், $r < n$ அல்லது $n - r > 0$ என்றிருக்கும். அதாவது, சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கை தெரியாத மாறிகளின் எண்ணிக்கையைவிடக் குறைவாக இருந்தால், சமன்பாடுகள் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெறுவோம்.

மாதிரி :

கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளுக்கு அணிகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காண்க.

$$x + y + z = 9$$
$$2x + 5y + 7z = 52$$
$$2x + y - z = 0$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அணிவடிவம்.

AX = B என்றவாறு அமைந்துள்ளது.

இப்பொழுது, விளிம்பு கூட்டிய அணி (augmented matrix)

$$[A, B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & 7 & 52 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

செய்கைகள்	விளிம்பு கூட்டிய அணி
$R_2 - 2R_1$, $R_3 - 2R_1$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & 34 \\ 0 & -1 & -3 & -18 \end{array}\right]$
R_{23}	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -18 \\ 0 & 3 & 5 & 34 \end{array}\right]$
$R_3 + 3R_2$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & -4 & 20 \end{array}\right]$

இப்பொழுது,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

எனவே, [A, B]-ன் மதிப்பிடம் 3 ஆகும்.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$ -ன் மதிப்பிடம் 3 ஆகும்.

A-ன் மதிப்பிடம் = [A, B] -ன் மதிப்பிடம் = 3 என்பதால், தீர்வுகள் தன்னிகரற்றனவாய் உள்ளன.

எனவே,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -18 \\ -20 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} x+y+z &= 9 \\ -y-3z &= -18 \\ -4z &= -20 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad z = 5, \; y = 3, \; x = 1$$

மாதிரி: கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகள் தீர்வுகளுக்கு இசைந்தனவாயில்லை (inconsistent) என்பதைக் காண்க.

$$\begin{aligned} x + y + z &= -3 \\ 3x + y - 2z &= -2 \\ 2x + 4y + 7z &= 7 \end{aligned}$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளை,

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix} = B$$

என்று அணிவடிவத்தில் எழுதலாம்.

இதன் விளிம்பு கூட்டிய அணி,

$$[A, B] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

செய்கைகள்	விளிம்பு கூட்டிய அணி
$R_3 - 2R_1$, $R_2 - 3R_1$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & 5 & 13 \end{array}\right]$
$R_3 + R_2$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right]$

இப்பொழுது,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 20 \end{vmatrix} = -40 \neq 0$$

எனவே, [A, B]-ன் மதிப்பிடம் = 3

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ என்பதால்,}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{-ன் மதிப்பிடம் 2 ஆகும்.}$$

$$P\,[A, B] \neq P\,(A) \text{ என்பதால்,}$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் தீர்வுகளுக்கு இசைவில்லாதனவாக உள்ளன என்று காண்கிறோம்.

மாதிரி : கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

இங்குத் தெரியாத மாறிகளின் எண்ணிக்கை சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையைவிடக் குறைவாயுள்ளது.

இச் சமன்பாடுகளை,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

என $AX = B$ வடிவத்தில் எழுதலாம்.

$R_4 - 2R_1$, $R_2 - 3R_1$, $R_3 - 4R_1$ என மேலுள்ள அணிகளுக்குச் செயல்படுத்தினால்,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$[A, B] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A-ன் மிகப்பெரிய சிற்றணிக் கோவை

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 \end{vmatrix} = 77 \neq 0$$

$\therefore \rho\,[A, B] = 3 = \rho(A)$ என்பதால்,

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் தீர்வுகளுக்கு இசைவுடையது என்பது விளங்குகிறது.

$\therefore$ தொடக்கத்திற்குரிய நிரைமாற்றங்களால்

$$(1) \Rightarrow x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$

$$-5x_2 - 5x_3 = -5 \text{ அல்லது } x_2 + x_3 = 1$$

$$-11x_2 - 5x_3 = -5 \text{ அல்லது } 11x_2 + 5x_3 = 5$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, \; x_2 = 0, \; x_3 = 1$$

5-H கிராமரின் முறை (Cramer's Method)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$ என்ற அணிக்கோவையைக் கருதுக.

$\Delta = aA + dD + gG$. இங்கு A, D, G ஆகியவை a, d, g ஆகிய மூலகங்களின் இணைக் காரணிகளாகும் (cofactors).

$$aB + dE + gH = 0$$

இப்பொழுது,

$$ax + by + cz = p \quad \dots \quad (1)$$
$$dx + ey + fz = q \quad \dots \quad (2)$$
$$gx + hy + cz = r \quad \dots \quad (3)$$

ஆகிய சமன்பாடுகளைக் கருதுவோம். இவற்றில் $p, q, r,$ ஆகிய எல்லாமே பூச்சியமற்றனவாகும்.

$$[A \times (1)] + [D \times (2)] + [G \times (3)]$$

$$\Rightarrow (aA + dD + gG)\,x + (bA + eD + hG)\,y + (cA + fD + iG)\,z = pA + qD + rG$$

$$\Rightarrow \Delta x + 0.y + 0 \cdot z = pA + qD + rG$$

$$\therefore \quad x = \frac{[pA + qD + rG]}{\Delta}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & i \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{L}{\Delta}$$

இதேபோல்,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & i \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{M}{\Delta}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ g & h & r \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{N}{\Delta}$$

குறிப்பு: $\Delta = 0$ எனில், சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் நிலைத்திரா.

மாதிரி :

$$2x + y = 4$$
$$3x + 5y = 13$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 13 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{7}{7} = 1 \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{14}{7} = 2$$

மாதிரி : கிராமரின் முறையைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்க.

$$3x + 2y - 2z = 1$$
$$-x + y + 4z = 13$$
$$2x - 3y + 4z = 8$$

$$\triangle = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(4 + 12) - 2(-4 - 8) - 2(3 - 2)$$
$$= 48 + 24 - 2 = 70 \neq 0.$$

எனவே, தீர்வுகள் நிலைத்திருக்கும் என்றறிகிறோம்

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 13 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 4 \end{vmatrix}}{\triangle} = \frac{1(4 + 12) - 2(52 - 32) - 2(-39 - 8)}{70}$$

$$= \frac{16 - 40 + 94}{70}$$

$$= \frac{70}{70} = 1$$

$$\therefore \quad x = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 13 & 4 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix}}{\triangle} = \frac{3(52 - 32) - 1(-4 - 8) - 2(-8 - 26)}{70}$$

$$= \frac{60 + 12 + 68}{70}$$

$$= \frac{140}{70} = 2$$

$$\therefore y = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 13 \\ 2 & -3 & 8 \end{vmatrix}}{\triangle} = \frac{3(8+39)-2(-8-26)+1(5-2)}{70}$$

$$= \frac{141 + 68 + 1}{70}$$

$$= \frac{210}{70} = 3$$

$$\therefore z = 3$$

5–I 'சோலஸ்கி'யின் முறை (Choleski's Method)

AX = B என்ற ஒருங்கமைச் சமன்பாட்டைக் கருதுக. L, U என்ற கீழ் முக்கோண, மேல் முக்கோண அணிகளின் பெருக்கலாக A அணியை அமைக்க வேண்டும்.

அதாவது, $LU = A$

$\therefore \quad AX = B$

$\Rightarrow \quad LUX = B$

இப்பொழுது, $UX = P$ எனில்,

$LP = B$

இதிலிருந்து P-ஐப் பெற்ற பின்பு, UX = P-லிருந்து தீர்வைக் காண்கிறோம்.

உதாரணமாக,

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 9 & -5 & -2 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -21 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

இப்பொழுது, $LU = A$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 9 & \lambda & 0 \\ 5 & m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 9 & -5 & -2 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

அணிகளைப் பெருக்கினால்,

$$\begin{aligned}
-3u &= 2 && \Rightarrow u = -\tfrac{2}{3} \\
-3v &= 1 && \Rightarrow v = -\tfrac{1}{3} \\
9u + l &= -5 && \Rightarrow l = 1 \\
9v + lw &= -2 && \Rightarrow w = 1 \\
-5u + m &= 3 && \Rightarrow m = -\tfrac{1}{3} \\
-5v + mw + n &= 1 && \Rightarrow n = -\tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

எனவே,

$$\underset{L}{\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ -5 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{A}{\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 9 & -5 & -2 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$AX = B$$

$$\Rightarrow LUX = B$$

இப்பொழுது, $UX = P$ எனில், $LP = B$

$$P = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

$$\therefore \; LP = B$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ -5 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -21 \\ 17 \end{bmatrix}$$

பெருக்கினல்,

$$-3p = 8 \Rightarrow p = -\tfrac{8}{3}$$
$$9p + q = -21 \Rightarrow q = 3$$
$$-5p - \tfrac{1}{3}q - \tfrac{1}{3}r = 17 \Rightarrow r = -14$$

$$\therefore \quad P = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tfrac{8}{3} \\ 3 \\ -14 \end{bmatrix}$$

எனவே, $UX = P$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\tfrac{2}{3} & -\tfrac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tfrac{8}{3} \\ 3 \\ -14 \end{bmatrix}$$

பெருக்கினல், $z = -14$

$$y + z = 3 \Rightarrow y = 17$$
$$x - \tfrac{2}{3}y - \tfrac{1}{3}z = -\tfrac{8}{3} \Rightarrow z = 4$$

இவ்வாருக,

$$X = \begin{bmatrix} 4 \\ 17 \\ -14 \end{bmatrix}$$ என்ற தீர்வுக் கணத்தைப் பெறுகிறோம்.

சில சிறப்பு வகைகள் (Some special cases)

மாதிரி :

$$x + y + z = 3$$
$$2x - y + 3z = 4$$
$$4x + y + 5z = 10$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}}$$

L ஐயும் U ஐயும் காண

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & l & 0 \\ 4 & m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

பெருக்கினால், $U = 1$

$V = 1$

$$\begin{aligned} 2u + l &= -1 &&\Rightarrow & l &= -3 \\ 2v + lw &= 3 &&\Rightarrow & w &= -\tfrac{1}{3} \\ 4u + m &= 1 &&\Rightarrow & m &= -3 \\ 4v + wm + n &= 5 &&\Rightarrow & n &= 0 \end{aligned}$$

எனவே,

$$\underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}}$$

இப்பொழுது,

$$\underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}} \underset{P}{\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}}$$

பெருக்கினால், $p = 3$

$$\begin{aligned} 2p - 3q &= 4 \;\Rightarrow\; q = \tfrac{2}{3} \\ 4p - 3q &= 10 \end{aligned}$$

இது p, q ஆகிய மதிப்புகளுக்குத் திருப்தி செய்யப்படுகிறது. ஆனால் r-ன் மதிப்பைப் பெற முடியவில்லை.

எனவே,

$$P = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{2}{3} \\ r \end{bmatrix}$$

இப்பொழுது, $UX = P$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{2}{3} \\ r \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad z = r$$

$$y - \tfrac{1}{3} z = \tfrac{2}{3} \Rightarrow \quad y = \frac{2+r}{3}$$

$$x + y + z = 3 \Rightarrow \quad x = 3 - \frac{2+r}{3} - r = \frac{7-4r}{3}$$

எனவே, தீர்வுக் கணம் r என்ற ஒவ்வொரு மெய் மதிப்புகளுக்கும் $\left(\frac{7-4r}{3}, \frac{2+r}{3}, r\right)$ என்ற முடிவில்லாப் புள்ளிகளின் கணமாகும் (infinite set of points).

மாதிரி 2:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 4 \\ 4x - 6y + 2z &= 5 \\ x - y - z &= 1 \end{aligned}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{L}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & l & 0 \\ 1 & m & n \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}$$

பெருக்கினால்,

$$2u = -3 \quad \Rightarrow \quad u = -\tfrac{3}{2}$$
$$2v = 1 \quad \Rightarrow \quad v = \tfrac{1}{2}$$
$$4u + l = -6 \quad \Rightarrow \quad l = 0$$

$4v + lw = 2$ என்பது, எல்லா w-ன் மதிப்புகளுக்கும் திருப்தி செய்யப்படுகிறது (ஏனெனில், $l = 0$ என்பதால்).

$$u + m = -1 \quad \Rightarrow \quad m = \tfrac{1}{2}$$
$$v + wm + n = -1 \quad \Rightarrow \quad n = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}w$$

எனவே,

$$\underset{L}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}w \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}$$

இப்பொழுது, $LP = B$ எனில்,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

பெருக்கினால்,

$$2p = 4 \quad \Rightarrow \quad p = 2$$
$$4p = 5 \quad \Rightarrow \quad p = \tfrac{5}{4}$$

இஃது இசைவற்றதாயுள்ளது (inconsistent) அதனால், தீர்வுகள் இல்லை.

5-J ஒருபடிச் சமன்பாடுகளுக்குப் பாகுபடுத்தும் முறையைச் செயல்படுத்துதல் (Application of partitioning to linear equation)

கொடுக்கப்பட்ட ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் வடிவம்,

$$AX = B \qquad \ldots (4{\cdot}10)$$ என்க.

இதில் B-ம், X-ம் ஒரே தரத்தைப் (order) பெற்ற நிரல் வெக்டர்களாகும். A என்பது, அதே தரத்தைப் பெற்ற சதுர அணியாகும். சாதாரண நிலையிலில்லாமல், தெரிந்த மூலகங்கள் அவ் வெக்டரின் கடைசியில் அமைந்திருக்குமாறும், தெரியாத மூலகங்கள் அவ் வெக்டரின் முன்னுல் அமைந்திருக்குமாறும் கருது கிறேம். தெரிந்த மூலகங்களை B_2 என்ற நிரல் வெக்டராகவும், தெரியாத மூலகங்களை B_1 என்ற நிரல் வெக்டராகவும், B-ஐப் பாகு படுத்துகிறேம். X-ஐ, B-க்கு ஏற்றுற்போல் X_1, X_2 என்று பாகு படுத்துகிறேம்.

$$A\text{-ஐ} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ என்று பாகுபடுத்துகிறேம்.}$$

இதில், A_{11}, A_{22} ஆகியவை சதுர அணிகளாகும்.

எனவே,

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \dots (5\cdot 16)$$

இதில் X_1-ம், B_2-ம் தெரிந்தவையாகும். X_1-ம், B_1-ம் ஒரே தரத்தைப் பெற்ற பாகுபடுத்தப்பட்ட நிரல் அணிகளாகும்.

$$(5\cdot 16) \Rightarrow A_{11} X_1 + A_{12} X_2 = B_1 \quad \dots (5\cdot 17)$$

$$A_{21} X_1 + A_{22} X_2 = B_2 \quad (5\cdot 18)$$

A_{22} சதுர அணி என்பதாலும், X_1-ம், B_2 ம் தெரிந்துள்ளமையால் (5·18)-லிருந்து $X_2 = A_{22}^{-1} (B_2 - A_{21} X_1)$ ... (5·19)

இதை (5·17)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$A_{11} X_1 + A_{12} A_{22}^{-1} (B_2 - A_{21} X_1) = B_1$$

இவ்வாறு, B_1 ஐப் பெறுகிறேம்.

எனவே, X_1, B_1 ஆகிய தெரியாத வெக்டர்களைக் கண்டு பிடித்துவிட்டோம்.

மாதிரி : ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் கீழ்க்காணும் வடிவத்தில் அமைந்துள்ளன.

$$\begin{bmatrix} 40 & 3 & -10 & -6 \\ 3 & 10 & -3 & -10 \\ -10 & -3 & 10 & 3 \\ -6 & -10 & 3 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -7 \\ 61 \end{bmatrix}$$

b_1, b_2 ; x_3, x_4 ஆகிய தெரியாதவற்றைக் காண்க.

$$AX = B$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 40 & 3 & -10 & -6 \\ 3 & 10 & -3 & -10 \\ \hdashline -10 & -3 & 10 & 3 \\ -6 & -10 & 3 & 40 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \hdashline x_3 \\ x_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \hdashline -7 \\ 61 \end{array}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} X_1 \\ \hdashline X_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hdashline B_2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad A_{11} X_1 + A_{12} X_2 = B_1 \quad \ldots (1)$$

$$A_{21} X_1 + A_{22} X_2 = B_2 \quad \ldots (2)$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 40 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \ldots \mathbf{(3)}$$

$$(2) \quad \Rightarrow - \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 61 \end{bmatrix} \quad \ldots (4)$$

(4)-லிருந்து,

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 61 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 \\ 83 \end{bmatrix}$$

அல்லது,

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 40 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 16 \\ 83 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{391} \begin{bmatrix} 40 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 83 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{391} \begin{bmatrix} 391 \\ 782 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

இதை (3)ஆம் சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டால்,

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 83 \\ 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 22 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 \\ -7 \end{bmatrix}$$

எனவே, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 \\ -7 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

என்று காண்கிறோம்.

பயிற்சி 5

1. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும் :

(i) $x + 3y - 2z = 0$
$2x - y + 4z = 0$
$x - 11y + 14z = 0$

(ii) $x - 2y + 3z = 0$
$2x + 5y + 6z = 0$

(iii) $7w - 3x + y - 7z = 0$
$w + 2x - y - z = 0$
$3w + 3x + 5y - 3z = 0$

(iv) $2x - 2y + 5z + 3w = 0$
$4x - y + z + w = 0$
$3x - 2y + 3z + 4w + 0$
$x - 3y + 7z + 6w = 0$

(v) $x + y + w = 0$
$y + z = 0$
$x + y + z + w = 0$
$x + y + 2z = 0$

2. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்க:

(i) $x + y + z = 4$
$2x + 5y - 2z = 3$

(ii) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4$
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4$
$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2$

(iii) $5x + 3y + 7z = 4$
$3x + 26y + 2z = 9$
$7x + 2y + 10z = 5$

(iv) $x + 2y - z = 3$
$3x - y + 2z = 1$
$2x - 2y + 3z = 2$
$x - y + z = 1$

(v) $x + 2y - 5z + 9 = 0$
$3x - y - 2z - 5 = 0$
$2x + 3y - z - 3 = 0$
$4x - 5y - z + 3 = 0$

3. கிராமரின் முறையைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வைக் காண்க.

(i) $x - 3y + z = 2$
$x + 2y - z = -1$
$2x + y + 2z = 6$

(ii) $x + y + z = 6$
$2x = y$
$x + y = z$

(iii) $x + 7y + 2z = 4$
$x - 7y + 2z = 2$
$7x + z = 6$

(iv) $7x - y - z = 64$
$2x + 5y - z = 59$
$x - 3y - 2z = 115$

(v) $3x + 2y - 4z = 7$
$2x - 3y + 5z = 2$
$14x + 31y - 57z = 46$

4. 'சோலஸ்கி'யின் முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்வுகள் இருப்பின் அவற்றைக் கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளிலிருந்து காண்க.

(i) $x + 3y + 2z = 1$
$5x + 2y + 7z = -2$
$x + 2y + z = 2$

(ii) $2x + y - 3z = 4$
$3x - 4y + 5z = 2$
$5x - 3y + 2z = 6$

(iii) $6x - 2y + 4z = 8$ (iv) $4x - 6y + 2z = 5$

$-9x + 3y - 6z = -12$ $-6x + 9y - 3z = 15$

$36x - 12y + 24z = 48$ $x + y + z = 2$

5. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$ எனில்,

b_1, b_2; x_3, x_4 ஆகியவற்றைச் சமன்பாடுகளைப் பாகுபடுத்தும் முறையின் மூலம் காண்க.

6. அணி உருவ மாற்றங்கள்
(Matrix Transformations)

6-A 2×2 அணிகளைப் பயன்படுத்தித் தளத்தின் உருவமாற்றங்கள்
(Transformation of the plane using 2×2 matrices)

ஒரு நிரல் வெக்டரை 2×2 அணியால் முன் பெருக்கல் செய்தால் அந்த வெக்டர் புதிய வெக்டராக உருவமாற்றம் பெறுகிறது.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ஆனது } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \text{ என்று உருவமாறினால்,}$$

(x, y)-ன் முறையான புள்ளிகளிலிருந்து (x', y')-க்கு உருவமாற்றம் (transformation or mapping) அடைந்ததாகக் கூறுகிறோம்.

இப்பொழுது, $(1, 0)$, $(0, 1)$ என்ற புள்ளிகளை உருவமாற்றம் செய்வோம். அதாவது, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ஆகிய வெக்டர்களின் உருவத்தை மாற்றுவோம்.

(a, b) என்ற ஏதோ ஒரு புள்ளியுடன் தொடர்பு கொண்டுள்ள $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ என்ற வெக்டரை $a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ என்று அமைக்கலாம்.

M என்பது 2×2 அணி என்றால், தளத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியையும் இவ்வணியைப் பயன்படுத்தி,

$$M\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = M\left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= aM\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + bM\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

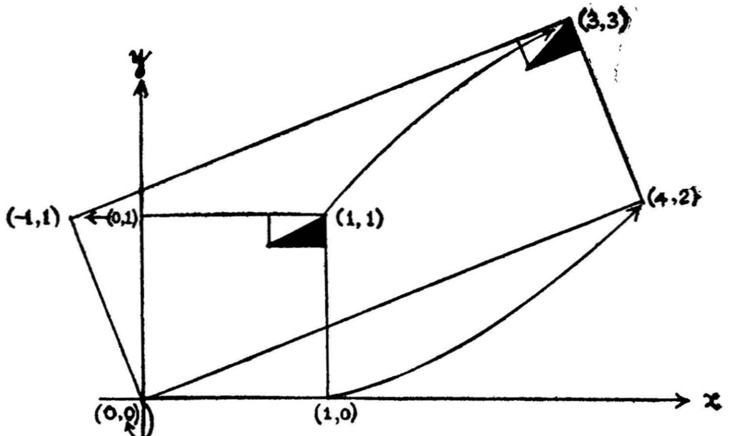
என்று மாற்ற முடியும்.

இப்பொழுது, இவ்வுருவ மாற்றத்தில் $M\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $M\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ ஆகியவை (1, 0), (0, 1) ஆகிய புள்ளிகளின் பிம்பங்களைக் (images) குறிக்கும் வெக்டர்களாகும்.

எனவே, (1, 0), (0, 1) ஆகிய புள்ளிகளின் பிம்பங்களைக் காண முடியுமென்றால் (a, b) என்ற ஏதோ ஒரு புள்ளியின் பிம்பத்தைக் காண முடியும். இதற்கு அலகு சதுரத்தை (unit square) உபயோகப்படுத்துகிறோம். அலகு சதுரத்தின் உச்சிகள் (vertices) (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1) ஆகும்.

மாதிரி : $\begin{bmatrix}4 & -1\\2 & 1\end{bmatrix}$ என்ற அணியின்மூலம் (x, y) தளத்தின் உருவத்தை மாற்றுக.

முதலில் அலகு சதுரத்தின் உச்சிகளின் (vertices) உருவ மாற்றத்தைக் கருதுகிறோம்.



படம் 1

$$\begin{bmatrix}4 & -1\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$ அதாவது, (0, 0) ஆனது (0, 0) ஆக உருவமாற்றமடைந்துள்ளது.

$\begin{bmatrix}4&-1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ அதாவது, (1, 0) ஆனது (4, 2) ஆக உருவ மாற்றமடைந்துள்ளது.

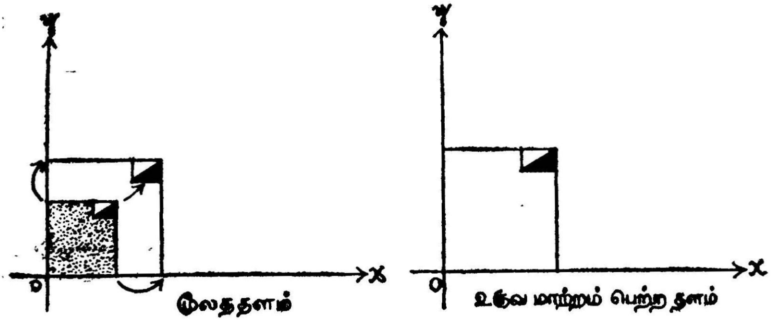
$\begin{bmatrix}4&-1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ அதாவது, (0, 1) ஆனது (–1, 1) ஆக உருவ மாற்றமடைந்துள்ளது.

$\begin{bmatrix}4&-1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$ அதாவது, (1, 1) ஆனது (3, 3) ஆக உருவமாற்றமடைந்துள்ளது.

இவ்வாறு அலகு சதுரம் இழுக்கப்பட்ட செவ்வக உருவமாக மாற்றப்பட்டுள்ளது.

மற்ற உருவ மாற்றங்களுக்கு மாதிரிகள் (Examples of other transformations)

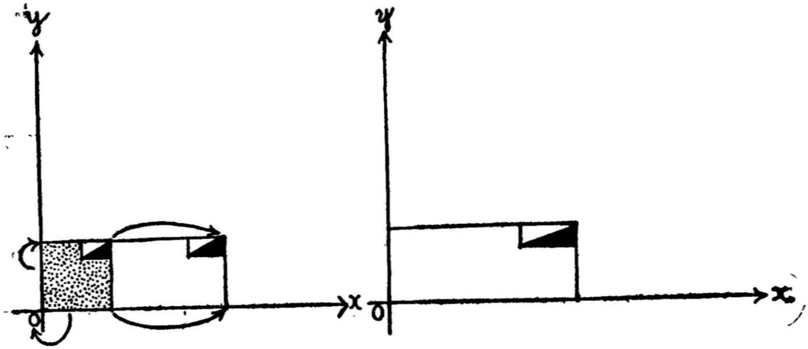
(a) ஆதியில் மையங் கொண்டு பெரிதாக்குதல் (Enlargement centre on the origin) :



படம் 2.

உதாரணமாகப் பெரிதாக்குவதற்கான அணி $\begin{bmatrix}k&0\\0&k\end{bmatrix}$, $k \in r$ ஆகும்.

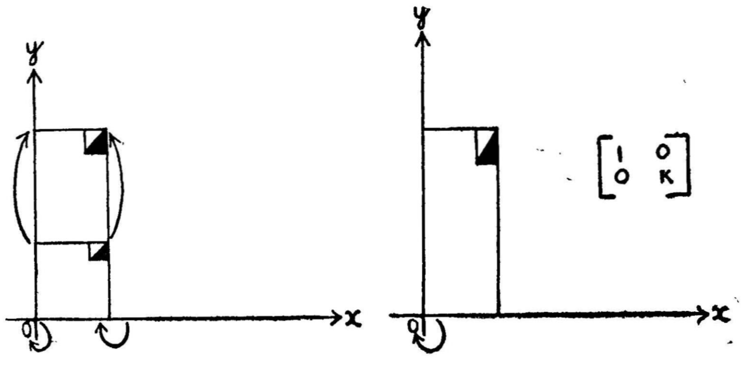
தொடர்புடைய உருவமாற்றங்கள் (Associated transformation):



படம் 3.

இந்த உருவ மாற்றத்திற்கான அணி $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $k \in r$ ஆகும்.

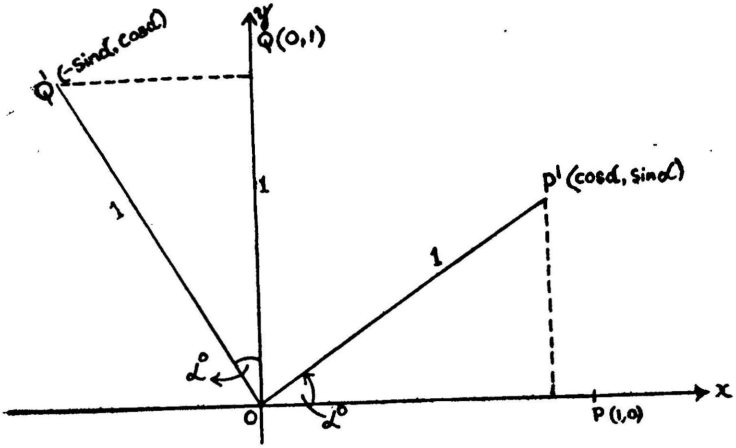
k-ன் எதிர் மதிப்புகளுக்கு (negative value) உருவமாற்றம் அடைந்த உருவம் இழுக்கப்பட்ட சுழற்சியால் (rotation) பெறப் படுகிறது.



படம் 4.

(b) சுழற்சிகள் (Rotations):

ஆதியைத் தழுவி α° இடஞ்சுழியாக (anti-clockwise) சுழற்றினால் அதனைப் பிரதிநிதித்துவம் செய்யும் (represents) அணியைக் காண்போம்.



படம் 5.

கவனித்தால்,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

எனவே,

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ஆகிய புள்ளிகளின் பிம்பங்களை இச் சுழற்சியால் கண்டுபிடிக்கிறோம்.

அவை, $\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$ ஆகும்.

இப்பொழுது தேவைப்படும் அணி $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ ஆகும்.

இதைப் பயன்படுத்தி $\cos(\alpha+\beta)$ - க்கான சூத்திரத்தைப் பெறலாம்.

$(\alpha+\beta)$ வரை சுழற்சி செய்தால், அது α வரை சுழற்சி செய்து, கூடவே β வரை சுழற்சி செய்வதற்குச் சமமாகும்.

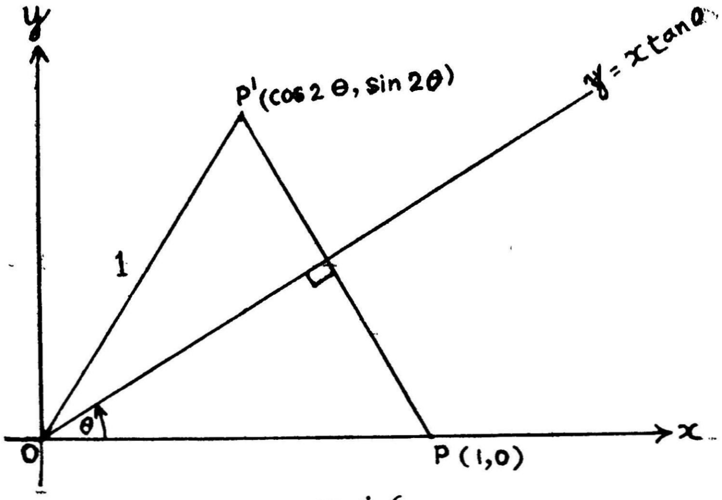
$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

ஒத்துப் பார்த்தால் $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

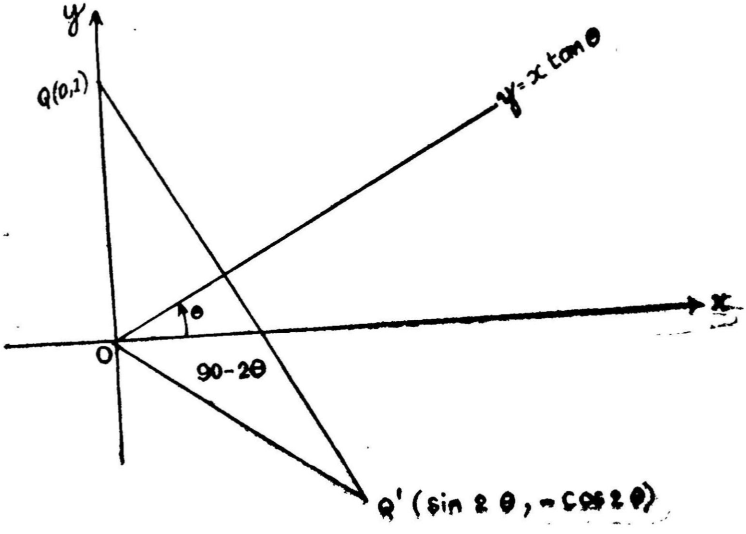
பிரதிபலிப்புகள் (Reflections)

$y = x \tan\theta$ என்ற நேர்க்கோட்டின் பிரதிபலிப்பிற்கான அணியைக் காண்போம். (1, 0) என்ற புள்ளியின் பிம்பம் ($\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$) ஆகும்.



படம் 6.

(0, 1)-ன் பிம்பம் ($\sin 2\theta$, $-\cos 2\theta$) ஆகும்.



படம் 7.

எனவே, பிரதிபலிப்பைப் பிரதிநிதித்துவம் செய்யும்

$$\text{அணி} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

n வெக்டர் வெளி (n vector space)

F என்ற களத்திற்கு முடிந்த எல்லா n வெக்டர்களின் கணத்தை n வெக்டர் வெளி என்கிறோம். இதனை, V_n (F) அல்லது V_n என்று குறிக்கிறோம்.

6-B ஒருபடி உருவமாற்றங்கள் (Linear Transformations)

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ என்க.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

என்ற நிரல் வெக்டர்களைக் கருதுக.

இவற்றின் அச்சுத் தூரங்களை (co-ordinates) ஒரே அடிப்படைக் குழுவை (basis) சார்ந்திருக்கட்டும்.

இப்பொழுது Y = AX ...... (6·1) என்று இருந்தால்,

X-ன் பிம்பமான Yஐ ... (6·1)-லிருந்து பெறுகிறோம். Aஐ உருவ மாற்று அணி (matrix of transformation) என்கிறோம்.

சமன்பாடு (6·1)-லிருந்து X_1, X_2-ன் பிம்பங்கள் Y_1, Y_2 எனில், (X_1+X_2)-ன் பிம்பம் (Y_1+Y_2) என்றும், X_1-ன் பிம்பம் Y_1 எனில், lx_1-ன் பிம்பம் ly_1 என்றும் எளிதில் அறியலாம். இதில் l என்பது அளவை (scalar) ஆகும். எனவே, (6·1)ஐ ஒருபடி உருவமாற்றம் (linear transformation) என்று கூறுகிறோம்.

இது வெக்டர் வெளி V_n-ன் எந்த X வெக்டரையும் பெற்று Y வெக்டரில் அதே வெளியைப் (space) பெற்று அமைகிறது.

ஒருபடி உருவமாற்றத்தின் மட்டு (Modulus of the Linear Transformation)

வரையறை : Y = AX என்ற ஒருபடி உருவமாற்றத்தில் அணிக்கோவை $|A| = |a_{ij}|$ ஐ ஒருபடி உருவமாற்றத்தின் மட்டு என்கிறோம். இதில் a_{ij} என்பது, Y = AX என்ற ஒருபடி உருவ மாற்றத்தின் குணங்களாகும்.

6-C சிறப்பற்ற, சிறப்புடைய உருவ மாற்றங்கள் (Non-singular and singular transformations)

வரையறை: Y = AX என்ற ஒருபடி உருவ மாற்றத்திலுள்ள A என்ற அணி சிறப்பற்றதாகவோ அல்லது சிறப்புடையதாகவோ இருந்தால், அந்த ஒருபடி உருவமாற்றத்தைச் சிறப்பற்றது அல்லது சிறப்புடையது என்று கூறுகிறோம். அதாவது, $|A|$ முறையே பூச்சியமற்றதாகவோ அல்லது பூச்சியமாகவோ இருந்தால்,

மாதிரி : Y = AX எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இதில்,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$ என்பது, V_2 (R) - லுள்ள

ஒருபடி உருவமாற்றம் எனில் $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ -ன்

பிம்பம் $$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times2+1\times0+2\times5 \\ 1\times2+2\times0+5\times5 \\ 1\times2+3\times0+3\times5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 \\ 27 \\ 17 \end{bmatrix}$$

மேலும், X வெக்டரின் பிம்பம் $Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ எனில்

வெக்டர் X ஐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ -க்குத் தீர்வு

காண்பதால் கிடைக்கிறது.

$R_2 - R_1$, $R_3 - R_1$ என்று செயல்படுத்தினால்,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$R_3 - 2R_2$ என்று செயல்படுத்தினால்,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_2 + 3x_3 = -2$$

$$-5x_3 = 7$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{13}{5}, \; x_2 = \frac{11}{5}, \; x_3 = \frac{-7}{5}$$

எனவே, $= X \begin{bmatrix} 13/5 \\ 11/5 \\ -7/5 \end{bmatrix}$

மாதிரி :

$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} X$ என்ற ஒருபடி உருவ மாற்றம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவ் உருவமாற்றத்தின் மட்டு

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

எனவே, அணி A சிறப்புடையதாக உள்ளது. இதனால் ஒருபடி உருவமாற்றமும் சிறப்புடையது என்று தெரிகிறது.

6-D இரண்டு ஒருபடி உருவமாற்றங்களின் விளைவு (Resultant of two linear transformation)

$$Z = BY \;\ldots\ldots (1) \qquad Y = AX \;\ldots\ldots (2)$$

அல்லது, $Z_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \, y_j \; \forall \; i = 1, 2 \ldots\ldots n.$

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \, x_k \; \forall \; j = 1, 2, \ldots n$$

என்ற இரண்டு ஒருபடி உருவமாற்றங்களைக் கருதுவோம். X என்ற ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் Y என்ற வெக்டர் ஒத்துள்ளது என்றும், Y என்ற ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் Z என்ற வெக்டர் ஒத்துள்ளது என்றும் தெரிகிறது. எனவே, இந்த வெக்டர்களை ஒன்ருகக் கொண்டால், அவை ஒவ்வொரு X வெக்டருக்கும் Z வெக்டரைத் தொடர்புபடுத்தும். இதனுல், ஒருபடி உருவமாற்றங்களின் விளைவைக் காண Y-க்கு X-ன்மூலமாகப் பிரதியிடுகிரேம். இவ்வாறு செய்து,

$$Z_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ij}\ a_{jk}\ x_k \ \forall\ i = 1, 2, \ldots n \text{ பெறுகிரேம்.}$$

அல்லது, $Z = BAX$

இது X-லிருந்து Z-க்கு ஒருபடி உருவமாற்றம் செய்யப்பட்டதன் விளைவாகும். இவ் உருவமாற்றத்தின் அணி BA ஆகும். அதாவது, B, A ஆகிய அணிகளின் பெருக்கலாகும்.

6-E இரண்டு உருவமாற்றங்களின் பெருக்கல் (Product of two linear transformation)

வரையறை : $Z = BY$; $Y = AX$ என்ற இரு உருவமாற்றங்களின் விளைவு $Z = BAX$ எனில், இவ் விளைவின் அணியானது இரு அணிகளின் உருவமாற்றங்களின் பெருக்கலுக்குச் சமம்.

மாதிரி : கீழ்க்காணும் இரண்டு உருவமாற்றங்களின் விளைவுகளைக்காண்க.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ y_2 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ y_3 &= 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \end{aligned}\right\} \ldots (1) \quad \left.\begin{aligned} z_1 &= y_1 + y_2 - y_3 \\ z_2 &= 2y_1 - y_2 \\ z_3 &= y_1 - y_2 + 2y_3 \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

இவ்விரண்டு உருவமாற்றங்களின் அணிவடிவம் $Y = AX$ ... (3)

$Z = BY$ ... (4) ஆகும்

இதில்,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & 7 \\ 7 & -8 & 11 \end{bmatrix}$$

(1), (2) ஆகிய உருவமாற்றங்களின் விளைவுகளைக் காண Y_1, Y_2, Y_3, ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை (1)-லிருந்து (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$Z_1 = 1\,(2x_1 - 3x_2 + 4x_3) + 1\,(x_1 + x_2 + x_3) - 1\,(3x_1 - 2x_2 + 4x_3)$$
$$= x_3$$

$$Z_2 = 2\,(2x_1 - 3x_2 + 4x_3) - 1\,(x_1 + x_2 + x_3)$$
$$= 3x_1 - 7x_2 + 7x_3$$

$$z_3 = 1\,(2x_1 - 3x_2 + 4x_3) + 1\,(x_1 + x_2 + x_3) + 2\,(3x_1 - 2x_2 + 4x_3)$$
$$= 7x_1 - 8x_2 + 11x_3$$

எனவே,

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= 0x_1 + 0x_2 + x_3 \\ Z_2 &= 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 \\ Z_3 &= 7z_1 - 8x_2 + 11x_3 \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (5)$$

இது (1), (2) ஆகிய உருவமாற்றங்களின் விளைவாகும், ஒருபடி உருவமாற்ற விளைவின் அணிவடிவச் சமன்பாடு $Z = PX$ ஆகும்.

இதில், $$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & 7 \\ 7 & -8 & 11 \end{bmatrix}$$

இதில், $P = BA$ என்பதைக் காணலாம்.

இவ்வாறு, $Z = B\,AX$ என்பதைக் காண்கிறோம்.

மாதிரி : $Y = x \tan \alpha$ என்ற நேர்க்கோட்டின் பிரதிபலிப்பைப் பிரதிநிதித்துவம் (represent) செய்யும் அணியைக் காண்க.

R என்பது, $-\alpha$ கோணத்திற்குச் சுழற்சி செய்யப்பட்டதெனில்,

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$ என்று கிடைக்கிறது.

x அச்சில் பிரதிபலிப்பு $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

$R\alpha$ என்பது α கோணத்திற்குச் சுழற்சி செய்யப்பட்டதெனில்,

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$ என்று கிடைக்கிறது.

இப்பொழுது, $Y = x\tan\alpha$ என்ற நேர்க்கோட்டின் பிரதிபலிப்பைப் பிரதிநிதித்துவம் செய்யும்அணி $R\alpha \times R_{-\alpha}$ ஆகும்.

$$\therefore R\alpha \, X \, R_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

மாதிரி : $y = mx + c$ என்ற நேர்க்கோட்டின் பிரதிபலிப்பைப் பிரதிநிதித்துவம் செய்யும் அணியைக் காண்க.

$m = \tan\alpha$ என்க. மேலுள்ள மாதிரியிலுள்ளதுபோல் y திசையில் $-C$-க்கு இடப்பெயர்ச்சி (translation) செய்தால்,

$$\text{இடப்பெயர்ச்சி} \quad T(\,,-\,) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{பிறகு } R_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x \text{ அச்சில் பிரதிபலிப்பு } X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ஒதிகையில் C-க்கு இடப்பெயர்ச்சி $T(_{0,\,c}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

தேவையான அணி $= T(_{0,\,c})\, R\alpha\, X\, R_{-\alpha}\, T(_{c,\,c})$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & -c\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & c(\cos 2\alpha + 1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

இதில், $\tan\alpha = m$ ஆகும்.

மாதிரி : $Y = AX$ என்ற உருவமாற்றத்திலிருந்து,

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$-ன் பிம்பத்தைக் காண்க.

இதில், $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$Y = AX \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

எனவே, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$-ன் பிம்பம் $X = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

மாதிரி : $Y = AX$ என்ற உருவமாற்றத்தில்,

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ எனில், $\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ என்ற பிம்பத்தைப் பெற்ற வெக்டரைக் காண்க.

$$Y = AX \Rightarrow X = A^{-1}Y = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

இப்பொழுது A-ன் விளிம்பு கூட்டிய அணி = [A, Y]

$$= \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$2R_2$, $2R_3$ என்று செயல்படுத்தினல் $= \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 12 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right]$

$R_2 - R_1$; $R_3 - R_1$ என்று செயல்படுத்தினல்,

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right]$$

$3R_3$ என்று செய்தால், $\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 15 \end{array}\right]$

$R_3 + R_2$ என்று செயல்படுத்தினல்

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

எனவே, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

அதாவது, $\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ என்ற பிம்பத்தைப்பெற்ற வெக்டர்

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

6-F செங்குத்தான உருவமாற்றங்கள் (Orthogonal transformations) செங்குத்தணி (Orthogonal Matrix)

வரையறை: A என்ற சதுர அணி $A^TA = I$ அல்லது $A^T = A^{-1}$ என்றவாறு இருந்தால், அந்த அணியைச் செங்குத்தணி என்று கூறுகிறோம்.

உதாரணமாக,

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

ஆகியவை செங்குத்தணிகளாகும். ஏனெனில்,

மாதிரியாக,

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

வரையறை: A என்பது ஒரு செங்குத்தணி என்றால், $Y = AX$ என்ற உருவமாற்றத்தைச் செங்குத்தான உருவமாற்றம் (orthogonal transformation) என்று கூறுகிறோம்.

தன்மைகள் (Properties): (a) A, B ஆகியவை செங்குத்தணிகளென்றால்,

$$AA^T = A^TA = I, \quad BB^T = B^TB = I$$

எனவே, $(AB)\ (AB)^T = AB\ B^TA^T$

$[(AB)^T = B^TA^T$ என்பதால்,$]$

$$= A\,(BB^T)\,A^T = AI\,A^T = AA^T = I$$

எனவே,

(a) இரு செங்குத்தணிகளின் பெருக்கல் மற்றொரு செங்குத்தணியாகும்.

(b) ஒரு செங்குத்தணியின் நேரெதிர் அணி செங்குத்தணியாகும். மேலும், ஒரு செங்குத்தணியின் திருப்பு அணியும் ஒரு செங்குத்தணியாகும்.

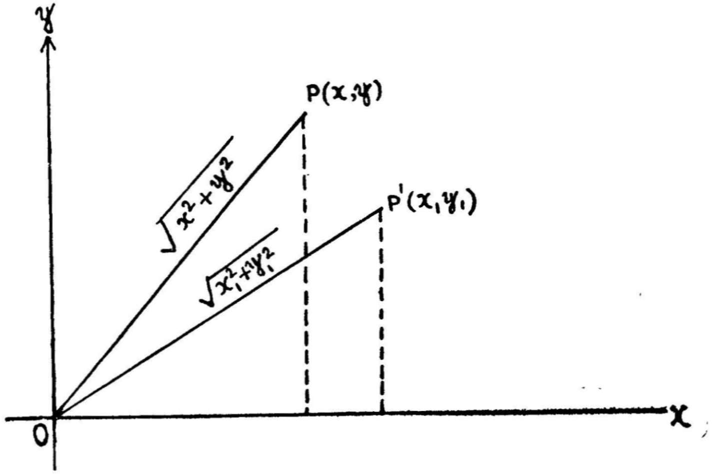
(c) ஒரு செங்குத்தணியின் அணிக்கோவையின் மதிப்பு ± 1 ஆகும். ஏனெனில், $AA^T = I$; $|A|\ |A^T| = |A|^2 = |I| = 1$ எனவே, $|A| = \pm 1$

(d) ஒரு தளத்தில் (plane) $P(x_1\ y)$ என்ற புள்ளியைக் கருதுக.

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ என்ற நிரல் வெக்டரைக் கருதினுல்,

$$X^T X = [x \quad y] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + y^2$$

இஃது ஆதியிலிருந்து (origin) $p(x, y)$ வரையுள்ள தூரத்தின் வர்க்கமாகும் (square).



படம் 8.

A என்ற செங்குத்தான உருவமாற்றத்தை X-க்குச் செயல்படுத்துவோம். புதிய அச்சுத்தூரம் (x_1, y_1), $\left[\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right.$ என்ற நிரல் வெக்டருடன் தொடர்புடையது $\Big] = Y$ எனில்,

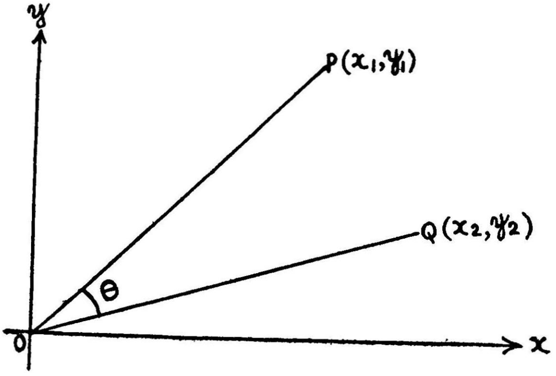
$Y = AX$. $Y^TY = x_1^2 + y_1^2$ (ஆதி மாறுமலிருந்தால்) என்பதால்,

$$X^1 Y = (AX)^T AX = X^T A^T AX = X^TX$$

$$i.e., \quad x_1^2 + y_1^2 = x^2 + y^2$$

எனவே, செங்குத்து உருவமாற்றத்தில் தூரத்தின் நிலை காக்கப் படுகிறது (distance is preserved).

(e) இரு வெக்டர்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம் இம்மாதிரி யான உருவமாற்றத்திலும் மாற்றமடைவதில்லை (invariant).



படம் 9.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{ எனில்,}$$

$$\cos\theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{X^TY}{(X^TX)^{\frac{1}{2}}\ (Y^TY)^{\frac{1}{2}}}$$

A என்ற செங்குத்து உருவமாற்றத்தை ஒவ்வொரு X, Y ஆகிய வற்றுக்குச் செயல்படுத்தினால். $Z = AX$. இதில் $Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ t_1 \end{bmatrix}$

$$T = AY \quad \text{இதில் } T = \begin{bmatrix} z_2 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

இப்பொழுது,

$$\cos\phi = \frac{Z^TT}{\{Z^TZ\}^{\frac{1}{2}}\ \{T^TT\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{(AX)^T\ AY}{[(AX)^T\ (AX)]^{\frac{1}{2}}\ [(AZ)^T(AY)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{X^T A^T AY}{\{X^T A^T AX\}^{\frac{1}{2}}\ \{Y^T A^T AY\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{X^TY}{\{X^TX\}^{\frac{1}{2}}\ \{Y^TY\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \cos\theta$$

எனவே, $\theta = \phi$ இவ்வாறாக, செங்குத்து உருவமாற்றத்தில் கோணத்தின் நிலை காக்கப்படுகிறது.

(f) A என்னும் செங்குத்தணியில், $|A| = +1$ என்றிருந்தால், அதன் ஒவ்வொரு மூலகமும் (element) அதனதன் இணைக் காரணிக்குச் (cofactor) சமமாயிருக்கும்.

நிரூபணம் ; $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ என்ற செங்குத்தணியைக் கருதுவோம்.

$$A^{-1} A^{T} \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

ஆனால் $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \div |A| = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$

$$(\because |A| = 1)$$

$$\therefore (1) \Rightarrow A^{T} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^{T} = A^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{21} \\ A_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

கவனிக்கவும் : $|A| = +1$ எனில், A ஐத் தகு–செங்குத்தணி (proper orthogonal matix) என்கிறோம்.

6–G 2×2 அணி செங்குத்தாக இருப்பதற்கான நிபந்தனை (Condition for a 2×2 Matrix to be Orthogonal)

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ எனில், $A^{T}A = I$ அல்லது $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

உறுப்புகளை ஒத்துப்பார்த்தால், $a^2 + c^2 = 1$; $ab + cd = 0$; $b^2 + d^2 = 1$

$a \in R$; $c \in R$ எனில்,

$a^2 \geqslant 0$; $c^2 \geqslant 0$ எனவே,

$a^2 + c^2 = 1$ எனில்,

$a^2 \leqslant 1$; $c^2 \leqslant 1 \qquad \Rightarrow -1 \leqslant a \leqslant 1$; $-1 \leqslant c \leqslant 1$

இதேபோல் b-க்கும் d-க்கும் பொருந்தும்.

$a = \cos\theta$; $b = \cos\phi$; $c = \sin\theta$; $d = \sin\phi$

எனில், $ab + cd = 0 \Rightarrow \cos\theta \cos\phi + \sin\theta \sin\phi = 0$

அல்லது $\cos(\theta - \phi) = 0$

$$\Rightarrow \theta - \phi = \frac{\pi}{2} \text{ அல்லது. } \theta - \phi = \frac{3\pi}{2}$$

நம் நிபந்தனைகளைத் திருப்தி செய்யும் இரண்டு 2×2 அணிகள் உள்ளன. அவை.

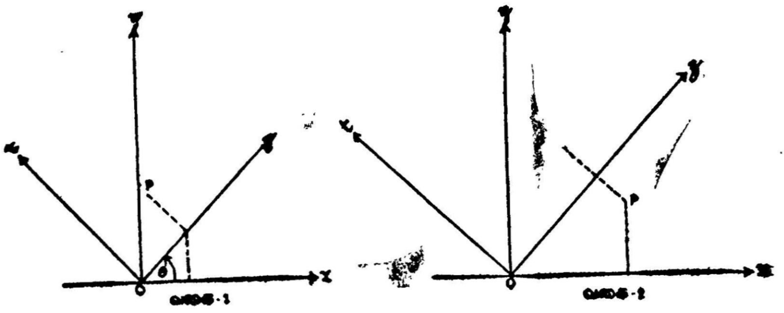
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

இவற்றின் முதல் அணி ஆதிக்கு (origin)θ° சுழற்சி பெற்றுள்ளது

இரண்டாம் அணி ஆதிக்கு θ° சுழற்சி பெற்றுப் புதிய x அச்சில் (i.e., z – axis) பிரதிபலிப்பைப் பெற்றுள்ளது.

முதல் வகையில் அணிக்கோவையின் மதிப்பு 1 ஆகும்.

இரண்டாம் வகையில் அணிக்கோவையின் மதிப்பு – 1 ஆகும்.



படம் 10

(g) A என்ற அணியைக் கொண்டு ஒரு வெக்டரின் உருவத்தை மாற்றும்பொழுது அதன் தூரம் மாறாதிருந்தால், A ஒரு செங்குத்தணியாக இருக்கவேண்டும்.

$Y = AX$ என்ற உருவமாற்றம் செய்தால்,

$$(AX)^T AX = X^T X \qquad (\therefore A^T A = I)$$

$$\therefore X^T A^T AX = X^T X; \quad \therefore X^T (A^T A - I) X = 0$$

$$X^T BX = 0 \qquad \ldots\ldots \qquad (1)$$

(இதில், $B = A^T A - I$)

இப்பொழுது B = 0 என நிரூபிக்க வேண்டும். ஆனால், B ஒரு சமச்சீர் என்பதைக் கவனிக்கவும். ஏனெனில், $B^T = (A^T A - I)^T = A^T A - I = B$. அணி B-ன் மூலகங்கள் $b_{ij} = b_{ji}$ என்னும் வெக்டர் X-ன் மூலகங்கள் x_i எனவும் கொண்டால்,

(1) $\Rightarrow X^T BX = b_{11} x_1^2 + \dots\dots + b_{nn} x_n^2 + 2b_{12} x_1 x_2 + \dots\dots + 2b_{ij} x_i x_j + \dots\dots = 0$

இதில் $X^T = [1, 0 \dots\dots 0]$ என்று கருதினால்

$$X^T BX = b_{11} x_1^2 = 0 \Rightarrow b_{11} = 0$$

இதேபோல் $\forall_i$, $b_{ii} = 0$ என்று நிரூபிக்க முடியும்.

இப்பொழுது $x_i = x_j = 1$ என்றும் மற்ற மூலகங்கள் 0. X ஐக் கொண்டால் $X^T BX = 0 \Rightarrow 2 b_{ij} \; x_i x_j = 0$.

$$[\therefore b_{ii} = b_{ij} = 0]$$

$$\Rightarrow b_{ij} = 0$$

$$\therefore B = 0 \text{ அல்லது } A^T A - I = 0$$

$\therefore A^T A = I$ என்பதால், A ஒரு செங்குத்தணியாகும்.

6-H சிக்கல் செங்குத்தான உருவமாற்றம் (Unitary Transformation)

சிக்கல் செங்குத்தணி (unitary matrix) வரையறை: A என்ற சதுர அணி $A^* A = I$ என்றிருந்தால் அதை சிக்கல் செங்குத்தணி என்கிறோம்.

தன்மைகள்: (a) ஒரு சிக்கல் செங்குத்தணியின் அணிக்கோவையின் மட்டு (modulus) ஆகும்.

நிரூபணம்: $|A^*| = |A^T| = |\bar{A}|$

$$|A^*A| = |A^*| \; |A| = |\bar{A}| \; |A|$$

$$\therefore A^*A = I \text{ எனில் } |\bar{A}| \; |A| = 1$$

(b) A, B என்பவை சிக்கல் செங்குத்தணிகள் எனில், AB-ம் BA-ம் செங்குத்தணிகளாகும் (orthogonal matrices).

நிரூபணம்: $(AB)^* AB = B^* A^*. AB = B^* I B = B^* B = I$

$\therefore$ AB ஒரு செங்குத்தணியாகும்.

இதேபோல் $(BA)^* BA = A^* B^* BA = A^* I A = A^*A = I$

$\therefore$ BA ஒரு செங்குத்தணியாகும்.

(c) சிக்கல் செங்குத்தணியின் நேரெதிர் அணி, சிக்கல் செங்குத் தணியாகும்.

நிரூபணம்: A சிக்கல் செங்குத்தணி என்றால் $AA^* = I$;

$$\Rightarrow (AA^*)^{-1} = I$$

அல்லது $(A^*)^{-1} A^{-1} = I$

அல்லது $(A^{-1})^* (A^{-1}) = I$

எனவே, A^{-1} என்பது சிக்கல் செங்குத்தணியாக உள்ளது.

வரையறை: A என்பது சிக்கல் செங்குத்தணி என்றால், $Y = AX$ என்ற உருவமாற்றத்தைச் சிக்கல் செங்குத்தான உருவமாற்றம் (unitary transformation) என்கிறோம்.

கவனிக்கவும்: A என்ற சிக்கல் செங்குத்தணி என்பதால், அது சிறப்பற்ற அணியாகும்.

மேலும், $A^{-1} = A^*$ ஆகும்.

A மெய்யான மூலகங்களைப் பெற்ற சிக்கல் செங்குத்தணி என்றால், $A^T A = I$ ஆகும்.

6-I இரு வெக்டர்களின் உள்பெருக்கல் (Inner product of two Vectors)

X, Y என்பவை இரு நிரல் வெக்டர்கள் எனில், $X^* Y$ஐ X, Y ஆகியவற்றின் உள்பெருககல் என்கிறோம்.

எனவே, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$; $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ x_i ; $y_j \in F$ (கணம்)

$\forall\, i = 1, 2 \ldots\ldots n$ எனில் X, Y ஆகியவற்றின் உள்பெருக்கல்

$$X^* Y = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \ldots\ldots\ldots + \bar{x}_n \; y_n$$

குறிப்பு:

( ) X, Y ஆகியவற்றின் உள்பெருக்கல் Y, X ஆகியவற்றின் உள்பெருக்கலுக்குச் சமமாகாது.

அதாவது, $X^* Y \neq Y^* X$

(ii) X, Y ஆகிய வெக்டர்களின் மூலகங்கள் மெய் எனில் இவற்றின் உள்பெருக்கல்கள் சமமாகும்.

அதாவது, $X^TY = Y^TX = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots\ldots x_n y_n$.

தேற்றம் : $Y = AX$ என்ற ஒவ்வொரு சிக்கல் செங்குத்தான உருவமாற்றமும் உள்பெருக்கலைக் (inner product) காக்கிறது (preserves).

நிரூபணம் : $Y_1 = AX_1$; $Y_2 = AX_2$

எனில், $Y_2^* = X_2^* A^*$

பிறகு, $Y_2^* Y_1 = X_2^* A^* A X_1 = X_2^* I X_1 = X_2^* X_1$

எனவே, உள்பெருக்கல் காக்கப்படுகிறது.

சிறப்பாக $X^* X = 0$ எனில், $Y^* Y = 0$ ஆகும்.

இவ்வாறாக ஒவ்வொரு சிக்கல் செங்குத்தான உருவமாற்றமும் செங்குத்தை (orthogonality) காக்கிறது என்பதைக் காண்கிறோம்.

6-J செங்குத்து வெக்டர் (Normal Vector)

ஒரு வெக்டரின் நீளம் (length) 1 எனில், அதனைச் செங்குத்து வெக்டர் என்கிறோம்.

தேற்றம் : சிக்கல் செங்குத்தணியின் நிரல் வெக்டர்கள் (நிரை வெக்டர்கள்) செங்குத்தாகவும் (normal), ஜோடியாகச் செங்குத்தாகவும் (orthogonal in pairs) இருக்கும்.

$A = [X_1, X_2, \ldots\ldots X_n]$ என்பது சிக்கல் செங்குத்தணி என்க.

$$\therefore\ A^*A = \begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \\ \vdots \\ X_n^* \end{bmatrix} [X_1, X_2 \ldots\ldots X_n]$$

$$= \begin{bmatrix} X_1^* X_1 & X_1^* X_2 & \ldots\ldots & X_1^* X_n \\ X_2^* X_1 & X_2^* X_2 & \ldots\ldots & X_2^* X_n \\ \vdots & \vdots & \ldots\ldots & \ldots \\ X_n^* X_1 & X_n^* X_2 & \ldots\ldots & X_n^* X_n \end{bmatrix} = [X_i^* X_j]$$

$X^*X = I$ என்பதால் $i \neq j$ என்றிருந்தால் $X_i^* X_j = 0$

மேலும் $X_i^* X_j = I$ ஆகும்.

எனவே, $X_1 \ldots\ldots X_n$ என்ற நிரல் வெக்டர்கள் செங்குத்தாகவும் ஜோடியாகச் செங்குத்தாகவும் உள்ளன. இதேபோல் நிரை வெக்டர்கள் செங்குத்தாகவும், ஜோடியாகச் செங்குத்தாகவும் உள்ளன என்று நிரூபிக்க முடியும்.

6-K ஜாக்கோபியன் (Jacobian)

$$f^1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = y_1$$
$$f^2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = y_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^n(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = y_n$$

f^i என்ற சார்புகளின் முதல் பகுதிவகைக் கெழுக்களின் (partial derivatives) அணிக்கோவையே ஜாக்கோபியன் (Jacobian) ஆகும்.

இதனை,

$$J = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

6-L ஹெஸியன் (Hessian)

$V = f(x, y, z)$ என்ற சார்பைக் கருதினால்,

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$ என்ற அணிக்

கோவையை, அச் சார்பின் ஹெஸியன் அணிக்கோவை (Hessian Determinant) என்கிறோம்.

மாதிரி-1 : $x = u(1+v)$, $y = v(1+u)$ எனில்,

$$|J| = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+v & u \\ v & 1+u \end{vmatrix}$$

$$= (1+u)(1+v) - vu$$
$$= 1 + u + v$$

மாதிரி-2 :

$$u_1 = x_2^2 + 2a\, x_2 x_3 + x_3^2$$
$$u_2 = x_3^2 + 2b\, x_3 x_1 + x_1^2$$
$$u_3 = x_1^2 + 2c\, x_1 x_2 + x_2^2$$

எனில்,

$$J = \frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2(x_2 + ax_3) & 2(ax_2 + x_3) \\ 2(bx_3 + x_1) & 0 & 2(x_3 + bx_1) \\ 2(x_1 + cx_2) & 2(cx_1 + x_2) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 8(x_2 + ax_3)(cx_1 + x_2)(x_3 + bx_1)$$
$$+ 8(ax_2 + x_3)(bx_3 + x_1)(cx_1 + x_2)$$

பயிற்சி 6

1. x, y தளத்திலுள்ள (plane) ஒவ்வொரு புள்ளியையும் $y = x \tan\alpha$ என்ற நேர்க்கோட்டில் பிரதிபலிக்கச் செய்யும் அணி,

$$M\alpha = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$$ என்பதைக் காட்டுக. M_β

என்பது, $y = x \tan\beta$ என்ற நேர்க்கோட்டில் ஏற்பட்ட பிரதிபலிப்பு என்றால் $M_\beta M_\alpha$ என்பது, தளத்தின் சுழற்சி என்பதைக் காட்டி, அச் சுழற்சிக் கோணத்தைக் காண்க.

$M_\beta M_\alpha = M_\alpha M_\beta$ எனில்,

α-க்கும் β-க்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக் கண்டுபிடி.

2.
$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix};$$

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

() $\begin{bmatrix} X^1 \\ Y^1 \end{bmatrix} = A(\theta)\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ எனில்,

$(X^1 ; Y^1)$ என்ற புள்ளி $y = x \tan \theta/2$ என்ற நேர்க்கோட்டின் (X, Y)-ன் பிம்பம் என்பதைக் காட்டுக.

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ எனில், Y = AX என்ற உருவ மாற்றத்திலிருந்து $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$-ன் பிம்பத்தைக் காண்க.

4. அணிகளின் உருவமாற்றங்களைப்பற்றி விவரித்து எழுதுக.

5. செங்குத்தணியின் தன்மைகளைக்கூறி அவற்றை நிரூபிக்கவும்.

6. சிக்கல் செங்குத்தணியின் தன்மைகளைக்கூறி, அவற்றை நிரூபிக்கவும்.

7. கீழ்க்காணும் அணிகள் செங்குத்தணிகள் என்பதைக் காட்டுக.

(i) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ (ii) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

8. கீழ்க்காணும் அணிகள் சிக்கல் செங்குத்தணிகள் என்பதைக் காட்டுக.

() $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix}$

9. A என்பது சிக்கல் செங்குத்தணியாகவும், ஹெர்மிஷன் அணியாகவுமிருந்தால் $A^2 = I_n$ என்பதை நிரூபி. அதாவது A தன்னெதிர் அணி (involuntary matrix) என்பதை நிரூபி.

10. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ என்றிருந்தால்,

$$\begin{bmatrix} a+ic & -b+id \\ b+id & a-ic \end{bmatrix}$$ சிக்கல் செங்குத்தணி என்பதைக் காண்க.

11. $AA^T = BB^T$ என்றிருக்குமாறு A, B என்பவை $n \times n$ தரத்தைப்பெற்ற சிறப்பற்ற அணிகள் எனில், $A = BP$ என்றிருக்குமாறு P என்ற ஒரு செங்குத்தணி உள்ளது என்பதைக் காட்டுக.

12. $P = \begin{bmatrix} A_1 & A \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ என்பது செங்குத்தணியாக இருக்குமாறு A_1 ; A_2 ஆகிய சதுர அணிகள் அமைந்துள்ளன. பின்பு A_1. A_2 ஆகியவை செங்குத்தணிகள் என்றும் $A = 0$ என்றும் நிரூபி.

13. $u_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}$, $u_2 = \frac{x_1 x_3}{x_2}$, $u_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$ எனில்,

$J(u_1, u_2, u_3) = 4$ என்பதை நிறுவுக.

7. அணியின் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு

(The Characteristic Equation of a Matrix)

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ என்ற சதுர அணி கொடுக்கப்பட்டால், λ என்ற திசையிலியையும், (scalar), X என்ற பூச்சியமற்ற வெக்டரையும் $AX = \lambda X$ ... (7·1) என்ற சமன்பாட்டை ஒரே சமயத்தில் திருப்தி செய்யுமாறு கண்டுபிடிக்கிறோம். X ஐச் சிறப்பியல்பு வெக்டர் (Characteristic root) என்று கூறுகிறோம். சிறப்பியல்பு வெக்டரை (characteristic vector), ஐகன் வெக்டர் (Eigen vector) என்றும் கூறலாம்.

$$7{\cdot}1 \text{ ஐ } (A - \lambda I_n) X = 0 \qquad \ldots\ldots \qquad (7{\cdot}2)$$

என்றும் எழுதலாம்,

7·2-ன் அணிக்கோவை (determinant) மதிப்பு மறையுமானல் n சமபடித்த (homogeneous) ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் n தெரியாதவற்றுக்குத் திரணமல்லாத (non-trivial) தீர்வுகளைப் பெற்றுள்ளன என்கிறோம்.

எனவே,

$$|A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

இந்த அணிக்கோவையை விரித்து எழுதினல் λ-ன் n-படி பல்லுறுப்புக்கோவை (polynomial) கிடைக்கின்றது. இதனை A-ன் சிறப்பியல்பு பல்லுறுப்புக் கோவை (characteristic polynomial) என்கிறோம். மேலும், இதனை $\phi(\lambda)$ என்று குறிப்பிடுகிறோம். $\phi(\lambda) = 0$ ஐச் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு (characteristic equation) என்கிறோம். λ_1 என்பது, A-ன் யாதாமொரு சிறப்பியல்பு மூலம் என்க. $\phi(\lambda) = 0$ ஆனது λ_1 என்ற ஒரே ஒரு தெளிவான (distinct) மூலத்தையும் (root) அதற்கேற்ற சமன்பாடான (7·2) ஆனது ஒரே ஒரு சார்பற்ற தீர்வையும் பெற்றிருக்கும்.

குறிப்பு :

(i) 7·2 ஆனது சமபடித்தானதாகவும் (homogeneous) X என்பது, A-ன் சிறப்பியல்பு வெக்டர் என்றும் இருந்தால் K X-ம் சிறப்பியல்பு மதிப்புகளுக்கு (characteristic values) ஏற்ற A-ன் ஒரு சிறப்பியல்பு வெக்டராகும்.

(ii) A-ன் சிறப்பியல்பு வெக்டருக்கு A-ன் வேறுபட்ட சிறப்பியல்பு மதிப்புகள் இருக்கமுடியாது. $AX = \lambda_1 X$; $AX = \lambda_2 X$ என்க.

பிறகு, $\lambda_1 X = \lambda_2 X$ அல்லது $(\lambda_1 - \lambda_2) X = 0$

ஆனால், $X \neq 0$ எனவே, $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ இவ்வாறாக $\lambda_1 = \lambda_2$.

மாதிரி :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் சிறப்பியல்பு வெக்டரைக் காண்க. மேலும், அவை செங்குத்தானவை (orthogonal) என்பதை நிரூபி.

$$AX = \lambda X \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x + 2y = \lambda x \\ 2x - 2y = \lambda y \end{matrix} \qquad \Rightarrow \begin{matrix} x(1-\lambda) = -2y \\ 2x = (\lambda + 2) y \end{matrix}$$

$x = 0$; $y = 0$ என்ற தீர்வு தேவையில்லை என்பதால்,

$$\Rightarrow \frac{1-\lambda}{2} = \frac{-2}{\lambda+2} \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda+2) = -4$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2 \text{ அல்லது } \lambda = -3$$

$\lambda = 2$ என்றால் $x + 2y = 2x \Rightarrow x = 2y$

இத் தொடர்பைத் திருப்தி செய்யும் வெக்டர் $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

$x = -3$ என்றால், $x + 2y = -3$: $\Rightarrow -\frac{1}{2} y = x$

இத் தொடர்பைத் திருப்தி செய்யும் வெக்டர் $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

இவ்வாறாக $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ என்ற சிறப்பியல்பு வெக்டர்களைக் கண்டோம்.

$[2 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$ என்றிருப்பதால், இந்தச் சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் செங்குத்தானவையாகும்.

பொதுவாக,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

என்றிருப்பதற்கு k ஆனது $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ -ன் சிறப்பியல்பு மதிப்பு (characteristic values) களாகும். $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ஆனது சிறப்பியல்பு வெக்டராகும். சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் தன்னிகரற்றதன்று (not-unique) என்பதைக் கருத்தில் கொள்ளவேண்டும்.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = K I \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ இங்கு } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow (A - K I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left. \begin{aligned} (a-k)\,x + b\,y &= 0 \\ cx + (d-k)\,y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

இச் சமன்பாடுகள் $\dfrac{a-k}{c} = \dfrac{b}{d-k}$ என்றிருந்தால் இசைவுடையதாக (consistant) இருக்கும்.

$$\Longleftrightarrow \quad (a-k)(d-k) - bc = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \triangle \equiv \begin{vmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{vmatrix} = 0$$

அல்லது $k^2 - (a+d)k + ad = bc = 0$

இதனை, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ -ன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு என்கிறோம்.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

$$(a+d)\,A = \begin{bmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{bmatrix}$$

இதனால் $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$ ...... (7·3)

எனவே, அணி A அதன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்கிறது என்று காண்கிறோம். இதனைப் பெரிய சதுர அணிகளுக்கு நீட்டினால் (extend) அது கெய்லி — ஹாமில்டன் தேற்றமாகும்.

7-B கெய்லி-ஹாமில்டன் தேற்றம் (Cayley-Hamilton Theorem)

A என்ற ஒவ்வொரு சதுர அணியும் அதன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டை (characteristic equation) திருப்தி செய்கிறது.

நிரூபணம் :

$(A - \lambda I)$ சேர்ப்பு $(A - \lambda I) = |A - \lambda I|\, I$ ...... (7·4) என்ற முற்றொருமையைக் (identity) கருதுக.

வரையறையின்படி,

சேர்ப்பு $(A - \lambda I) = c_0 + \lambda c_1 + \dots\dots + \lambda^{n-1} c_{n-1}$
இதில் c_i அணிகளைத் தகுந்தவாறு தேர்ந்தெடுக்கிறோம்.

$$|A - \lambda I| = a_0 + a_1\lambda + \dots\dots + a_n\lambda^n$$

என்பது சிறப்பியல்பு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும் (7·4)-ல் λ-ன் கெழுக்களை ஒத்துப் பார்த்தால் $AC_0 = a_0 I$,

$$AC_1 - C_0 = a_1 I,$$

....

....

....

$$-C_{n-1} = a_n I.$$

முதல் சமன்பாட்டை I ஆலும் ; இரண்டாவது சமன்பாட்டை A ஆலும்; மூன்றாவது சமன்பாட்டை A^2 ஆலும் .... என்று பெருக்கிக் கூட்டினால்,

$$a_0 I + a_1 A + \ldots\ldots + a_n A^n = 0 \ldots\ldots \qquad (7{\cdot}5)$$

என்று கிடைக்கிறது. இவ்வாறு சதுர அணி A அதன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்கிறது என்று நிரூபிக்கிறோம்.

குறிப்பு : அணிகளின் அடுக்குகளைக் காண்பதற்குச் சமன்பாடு (7·3) மிகவும் பயன்படுகிறது. (7·3 ஐ $A^2 - eA + fI = 0$ என்று எழுதுவோம்.

i.e., $A^2 = eA - fI$,

பிறகு, $A^3 - eA^2 + fA = 0$

அதனால் $A^3 - e(eA - fI) + fA = 0$

i.e., $A^3 = (e^2 - f)A - efI$

மேலும், $A^4 - eA^3 + fA^2 = 0$

அதனால் $A^4 - e(e^2 - f)A - e(-efI) + f(eA - fI) = 0$

i.e., $A^4 = (e^3 - 2ef)A + (f^2 - e^2 f)I$

இவ்வாறாக அணியின் அடுக்குகளைக் காணமுடியும்.

$$\text{பொதுவாக, } \underline{A^n = zA + hI} \ \ldots\ldots \qquad (7{\cdot}6)$$

இதில் z, h ஆகியவை கண்டுபிடிக்கப்பட வேண்டிய திசையிலிகளாகும். (7·6)-லுள்ள தொடர்பு சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டின் சிறப்பியல்பு மதிப்புகள் சமமாய் இருந்தால் மிகவும் எளிதாகும்.

உதாரணமாக, சமமான மூலகங்கள் $k = \lambda$ என்க.

இதனால், கெய்லி-ஹாமில்டன் (2×2 அணிக்கு) தேற்றம் படி

$$A^2 - 2\lambda A + \lambda^2 I = 0$$

$$A^3 - 2\lambda A^2 + \lambda^2 A = 0$$

$$A^4 - 2\lambda A^3 + \lambda^2 A^2 = 0$$ என்று மேன்மேலும்

எழுதலாம்.

இப்பொழுது, $A^2 = 2\lambda A - \lambda^2 I$

$$A^3 = 2\lambda A^2 - \lambda^2 A = 2\lambda(2\lambda A - \lambda^2 I)$$

$$- \lambda^2 A = 3\lambda^2 A - 2\lambda^3 I$$

இதேபோல் $A^4 = 4\lambda^3 A - 3\lambda^4 I$ [A^3, A^2 ஆகியவற்றுக்குப் பிரதியீடு செய்தால்]

....

....

....

பொதுவாக, $A^n = n\lambda^{n-1}A - (n-1)\lambda^n I \quad n \geqslant 2$

கவனிக்கவும் : கெய்லி - ஹாமில்டன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஓர் அணியின் நேர் எதிர்அணியையும் (inverse matrix) காணமுடியும்.

$$A^2 - eA + fI = 0$$

பிறகு, A^{-1} ஆனுல் பின் பெருக்கல் (post-multiply) செய்தால்

$A - eI + fA^{-1} = 0$. அதனுல், $fA^{-1} = eI - A$

அல்லது $A^{-1} = \frac{1}{f}\{eI - A\}$

7-C சிறப்பியல்பு மதிப்புகளையும், சிறப்பியல்பு வெக்டர்களையும் பயன்படுத்தி ஓர் அணியின் அடுக்குகளைக் காணுதல் (Power of a Matrix using Characteristic Values and Characteristic Vectors)

முதலில் ஓர் உதாரணத்தைக் கவனிப்போம் $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$AX = KX \Longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = K\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow 4x + 2y = kx \; ; \; -3x - y = ky$$

$$\Longleftrightarrow (4-k)x = -2y; \; -3x = (k+1)y$$

இச் சமன்பாடுகள் $\frac{4-k}{-3} = \frac{-2}{k+1}$ என்றிருந்தால்தான் இசைவுடையதாக (consistent) இருக்கும்.

$$\Longleftrightarrow (4-k)(k+1) = 6$$

$$\Longleftrightarrow K^2 - 3k + 2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (k-2)(k-1) = 0$$

$$\Longleftrightarrow k = 2 \text{ அல்லது } k = 1$$

(i) $k = 2$ எனில் $(4-k)x = -2y$ என்ற தொடர்பு $x = -y$ என்றவாறு அமைகிறது.

எனவே, சிறப்பியல்பு வெக்டர் $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

(ii) $k = 1$ எனில் $(4 - k)\,x = -2\,y$ என்ற தொடர்பு $3\,x = -2\,y$ என்றவாறு அமைகிறது.

எனவே, சிறப்பியல்பு வெக்டர் $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

ஏனெனில், $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ என்பதால்.

இப்பொழுது, இந்தச் சிறப்பியல்பு வெக்டர்களை நிரல்களாகக் கொண்ட U என்ற அணியாக அமைப்போம்.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

K = 2-க்கு ஏற்ற சிறப்பியல்பு வெக்டர்

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AU = UD என்று அமைந்திருப்பதை எளிதில் நிறுவலாம்.

இதில், D என்பது சிறப்பியல்பு மதிப்புகளை (characteristic values) தலையாய மூலைவிட்டத்தில் கொண்ட மூலைவிட்ட அணியாகும்.

இப்பொழுது, $AU = UD$

பிறகு, $A = UDU^{-1}$

மேலும், $A^2 = UDU^{-1} \quad UDU^{-1}$

$= UD^2U^{-1}$

$A^3 = UD^2U^{-1} \quad UDU^{-1}$

$= UD^3U^{-1}$

....

....

$A^n = UD^nU^{-1}$

இப்பொழுது, D^n ஐக் காண்பது மிக எளிதாகும்.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D^2 = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1^2 \end{bmatrix}, \quad D^3 = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 1^3 \end{bmatrix}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad D^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{bmatrix}$$

உதாரணமாக,

$$A^6 = U D^6 U^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^6 & 0 \\ 0 & 1^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 64 & 2 \\ -64 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 190 & 126 \\ -189 & -125 \end{bmatrix}$$

இவ்வாருக, சிறப்பியல்பு மதிப்புகளையும், சிறப்பியல்பு வெக்டர்களையும் பயன்படுத்தி ஓர் அணியின் அடுக்குகளை எளிதாகக் காண்கிறோம்.

கவனிக்கவும் : U என்ற அணி சிறப்பு அணியாக (singular matrix) இருந்தால், ஓர் அணியின் அடுக்கைக் காண்பது எளிதன்று. சிறப்பியல்பு மதிப்புகள் சமமாய் இருந்தால், சிறப்பியல்பு வெக்டர்களும் சமமாய் இருக்கும். இதனல் U சிறப்பு அணியாக அமையும்.

உதாரணமாக,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

எனில், $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ இது சிறப்பு அணியாகும்.

U^{-1} நிலைத்திருக்காது. அதனல் ஓர் அணியின் அடுக்கைக் காண்பது எளிதன்று. எனினும், இதனை "ஜோர்டான்"-ன் நியமன வடிவம் மூலம் (Jordan canoncial form) காணலாம். இப்பொழுது ஓர் உதாரணத்தைக் காண்போம்.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$BX = KX$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} 2x + y &= Kx \\ -x + 4y &= Ky \end{aligned}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} (2-K)x &= -y \\ -x &= (K-4)y \end{aligned}\right\}$$

இச் சமன்பாடுகள் இசைவுடையனவாய் இருக்கவேண்டு மென்றால் $\frac{2-K}{-1} = \frac{-1}{K-4}$ என்றிருத்தல் அவசியம்.

$$\Longleftrightarrow (2-K)(K-4) = 1$$

$$K^2 - 6K + 9 = 0$$

$$\Longleftrightarrow K = 3 \text{ அல்லது } K = 3$$

(i) $K = 3$ எனில், $(2 - K)x = -y$ என்ற தொடர்பு $x = y$ என்றவாறு அமைகிறது.

(ii) $K = 3$ எனில், $(2 - K)x = -y$ என்ற தொடர்பு $x = y$ என்றவாறு அமைகிறது.

எனவே,

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ஆகியவை இரண்டு சமமான சிறப்பியல்பு வெக்டர்களாகும்.

இதனால், $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ சிறப்பு அணியாகிறது.

அதாவது, U^{-1} நிலைத்திருக்காது.

இப்பொழுது ஜோர்டன் – நியமன வடிவைப் (Jordan-Canonical form) பற்றிக் காண்போம்.

$B = V \wedge V^{-1}$ என்று எழுதுவோம் ($BV = V\wedge$)

இதில், $V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற சிறப்பியல்பு வெக்டர்களை (characteristic vector) நிரல்களாகக் கொண்ட அணியாகும்.

$\wedge = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ இதில் தலையாய மூலைவிட்டம் சிறப்பியல்பு மதிப்பான $K = 3$ஐப் பெற்று, மேல் வலக்கோடி மூலகம் 1 ஆக அமையும்படி உள்ளது (அதாவது $\wedge_{12} = 1$).

இப்பொழுது பொதுவாக, $V = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ என்று கருதுக.

இதில் $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ என்பது ஒரு சிறப்பியல்பு வெக்டராகும்.

$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ என்பது மற்றொரு சிறப்பியல்பு வெக்டராகும்.

$\therefore B = V \wedge V^{-1}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

இதில் $\Delta = ad - bc$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 3a & a+3b \\ 3c & c+3d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 3ad - ac - 3bc & a^2 \\ -c^2 & -3bc + ac + 3ad \end{bmatrix}$$

உறுப்புகளை ஒத்துப்பார்த்தால்,

$$2\Delta = 3ad - ac - 3bc \quad (1),$$

$$4\Delta = -3bc + ac + 3ad \quad (2),$$

$$\Delta = a^2 \quad (3),$$

$$-\Delta = -c^2 \quad (4),$$

(2)-லிருந்து (1) ஐக் கழித்தால்,

$$2\Delta = 2ac$$

அதாவது, $\Delta = ac$

இவ்வாறாக, $\Delta = a^2$

$\Delta = c^2$

$\Delta = ac$ என்ற மூன்று சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

V ஒப்பற்றதாயில்லை (non-unique) என்பதால், நாம் Δ-ன் மிக எளிதான மதிப்பான a ஐயும் c ஐயும் கருதுகிறோம்.

$\Delta = 1$ என்க.

பிறகு, $a = 1, c = 1$ என்றாகிறது.

$\Delta = 1$ என்பதால், $ad - bc = 1$

அதனால், $a = 1, c = 1$ என்பதால் $d - b = 1$

உதாரணமாக, $d = 3, b = 2$ என்ற மதிப்பை அனுமதிப்போம்.

இவ்வாறாக,

$$V = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore V^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$B = V \wedge V^{-1}$ என்றுள்ளதா என்று சரிபார்போம்.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = B \text{ (சரிபார்த்து விட்டோம்).}$$

முன்பே $B^n = V\wedge^n V^{-1}$ என்று கண்டோம் [அதாவது $A^n = UD^n U^{-1}$]. இங்கு $\wedge^n$ ஐக் காணவேண்டும்.

$$\wedge = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \wedge^2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}$$

$$\wedge^3 = \begin{bmatrix} 3 & 27 \\ 0 & 3^3 \end{bmatrix}, \ldots\ldots, \wedge^n = \begin{bmatrix} 3^n & n\cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

எனவே,

$$B^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & n\cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3^n & (2) & 3^n + n\cdot 3^{n-1} \\ 3^n & (3) & 3^n + n\cdot 3^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \{3^{n+1} & -n\cdot 3^{n-1} + (2) 3^n\} \\ \{(2)\, 3^{n+1} - n\cdot 3^{n+1}\} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n\cdot 3^{n-1} \\ \{3^{n+1} - (2)3^n + n.3^{n-1}\} \end{bmatrix}$$

7-D கெய்லி – ஹாமில்டன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஓர் அணியின் அடுக்குகளைக் காணுதல்

2×2 தரத்தைப் பெற்ற A என்ற சிறப்பற்ற அணியானது தன்னுடைய சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டை (characteristic equation) பூர்த்தி செய்தால் $A^2 + l\,A + mI = 0$ என்றாகும்.

Aஐ, $A = UDU^{-1}$ என்று எழுதலாம்.

இதில் U, D ஆகியவை முன் சொன்னது போல் சிறப்பற்ற அணிகளாகும்.

$$\therefore\; UDU^{-1}, UDU^{-1} + l\, UDU^{-1} + mI = 0$$

அல்லது, $UD^2U^{-1} + l\, UDU^{-1} + mI = 0$

இச் சமன்பாட்டை U^{-1} ஆல் முன் பெருக்கியும், U ஆல் பின் பெருக்கியும் செய்தால்,

$$U^{-1}\, UD^2\, U^{-1} + l\, U^{-1}\; UDU^{-1}U + mU^{-1}\, IU = 0$$

$$D^2 + l\,D + mI = 0$$

எனவே மூலைவிட்ட அணியான D, A -ன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்கிறது என்பதைக் காண்கிறோம். இதனால் ஓர் அணியின் அடுக்குகளைக் காண்பது மிக எளிதாகும்.

இவ்வாறே கெய்லி ஹாமில்டன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $A^n = pA + qI$ என்றும் $D^n = pD + qI$ என்றும் எழுதலாம் (7·6-லுள்ளது போல்).

மாதிரி :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ எனில் A^nஐக் காண்க.

A-ன் சிறப்பியல்பு மதிப்புகள் K = 3, K = 1 ஆகும்.

கெய்லி ஹாமில்டன் தேற்றம்படி

$$A^n = pA + qI$$
$$D^n = pD + qI$$

ஆனால், $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (முன்பு சொன்னது போல்)

$$D^n = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = p\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 3^n = 3p + q$$
$$1^n = p + q$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{3^n - 1^n}{2}, \quad q = \frac{3 - 3^n}{2}$$

எனவே, $A^n = pA + qI$

$$= \frac{3^n - 1^n}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{3 - 3^n}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

இவ்வாறாக ஓர் அணியின் அடுக்குகளைக் கெய்லி ஹாமில்டன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி எளிதாகக் காண்கிறோம்.

தேற்றம் :

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^n = K_n \begin{bmatrix} p-\lambda_1 & q \\ r & s-\lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$$

இதில்,

$$K_n = \lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2}\lambda_2 + \lambda_1^{n-3}\lambda_2^2 + \dots\dots + \lambda_2^{n-1}$$

இதில், λ_1, λ_2 என்பவை சிறப்பியல்பு மதிப்புகளாகும். இதனைத் தொகுத்தறி முறைமூலம் (By Indextion) நிரூபிக்கலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட சூத்திரம் சரியானதென்ருல்

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{n+1} = K_n \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p-\lambda_1 & q \\ r & s-\lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_n^2 \end{bmatrix}$$

ஆனல்,

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p-\lambda_1 & q \\ r & s-\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p-\lambda_1 & q \\ r & s-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

ஏனெனில், λ_1, λ_2 என்பவை

$\lambda^2 - (p+s)\lambda + ps - qr = 0$ என்ற சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டின் சிறப்பியல்பு மதிப்புகளாகும்.

என்வே,

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{n+1} = K_n \begin{bmatrix} p-\lambda_1 & q \\ r & s-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p-\lambda_1 & q \\ r & s-\lambda_2 \end{bmatrix} \left\{ K_n \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n+1} \end{bmatrix}$$

ஆனல்,

$$K_n \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} = K_{n+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ஆகும். (ஏனெனில், $K_{n+1} = \lambda_1^n + \lambda_1^{n-1}\lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_2^n$)

அதனல்,

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = K_{n+1} \begin{bmatrix} p-\lambda_1 & q \\ r & s-\lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n+1} \end{bmatrix}$$

தெளிவாக $n = 1$-க்கு உண்மை என்பதால் $n = 2, 3, \ldots\ldots$ ஆகிய மதிப்புகளுக்கும் உண்மையாக வேண்டும்.

மாதிரி: கீழ்க்காணும் A அணியின் சிறப்பியல்பு மதிப்புகளையும், சிறப்பியல்பு வெக்டர்களையும் கண்டு A^n ஐக் காண்க.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

சிறப்பியல்பு மதிப்புகளைக் காண்பதற்குச் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடான $|A - \lambda I| = 0$ஐக் கருதவேண்டும்.

$$i.e. \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ -2 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

$\Longleftrightarrow \lambda = 1$ அல்லது $\lambda = 2$ அல்லது $\lambda = 3$

$X = 1$ என்றால் $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ என்ற சிறப்பியல்பு வெக்டரை

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

என்றிருக்குமாறு காணவேண்டும்.

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 3x + 2y + 2z &= x \\ x + 4y + z &= y \\ -2x - 4y - z &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 3y + z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

தீர்வு கண்டால் $x = -1,\ y = 0,\ z = 1$ ஆகும்.

எனவே, $\lambda = 1$ எனில் சிறப்பியல்பு வெக்டர் $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

இப்பொழுது $\gamma = 2$ எனில்,

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 3x + 2y + 2z &= 2x \\ x + 4y + z &= 2y \\ -2x - 4y - 4z &= 2z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x + 2y + 2z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

தீர்வு கண்டால் $x = -2, y = 1, z = 0$

எனவே, $\lambda = 2$ எனில் சிறப்பியல்பு வெக்டர் $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

கடைசியாக $\lambda = 3$ எனில்,

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 3x + 2y + 2z &= 3x \\ x + 4y + z &= 3y \\ -2x - 4y - z &= 3z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ \tfrac{x}{2} + y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

தீர்வு கண்டால் $x = 0, y = -1, z = 1.$

எனவே, $\lambda = 3$ எனில், சிறப்பியல்பு வெக்டர் $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ஆகும்.

$A^n = UD^n U^{-1}$. இங்கு $U \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \therefore A^n = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$U^{-1} = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$ (நான்காம் அத்தியாயத்தில்

உள்ள ஏதாவது ஒரு முறையைப் பயன்படுத்தினால்),

$$\therefore A^n = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2^n & -3^n \\ 1 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} -1+2^{n+1} & -2(2^n+1) & -2(2^n+1) \\ -2^n-3^n & 2^n+2\cdot 3^n & 2^n-3^n \\ 1-3^n & 2(1-3^n) & 2+3^n \end{bmatrix}$$

சிறப்பியல்பு மதிப்புகள் — வெக்டர்கள் ஆகியவற்றின் சில தன்மைகள் (Some properties of Characteristic Values and Vectors)

தேற்றம்-1: ***சமச்சீர் அணியின் சிறப்பியல்பு மதிப்புகள் மெய்யாக இருக்கும்.***

நிரூபணம் : இயலுமானால் $\lambda = \alpha + i\beta$ என்பது, சிக்கல் சிறப்பியல்பு மதிப்பு என்றும், $Z = X + iY$ என்பது, சமச்சீர் அணியான A-ன் சிறப்பியல்பு மதிப்பான λ-க்கு ஏற்றதான சிக்கல் சிறப்பியல்பு வெக்டர் என்றும் கொள்க.

பிறகு, $A(X + iY) = \lambda(X + iY)$

$(X - iY)^T$ ஆல் முன் பெருக்கல் செய்தால்,

$$(X - iY)^T A (X + iY) = \lambda (X^T X + Y^T Y)$$

என்று கிடைக்கிறது.

மேலேயுள்ள சமன்பாட்டில் இடப்பக்கத்திலுள்ள

$X^T AX + Y^T AY$ என்பது, மெய்யான அளவாகும் (Real quantity)

மேலும், $(X^T X + Y^T Y)$-ம் மெய்யான அளவாகும்.

எனவே, λ மெய்யானது என்று அறிகிறோம்.

குறிப்பு : A என்ற ஒவ்வொரு சமச்சீர் அணியும், சரியாக 'n' மெய்யான சிறப்பியல்பு மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும்.

தேற்றம் 2: ஒவ்வொரு சமச்சீர் அணியின் தனித்த சிறப்பியல்பு மதிப்புகளுக்கான சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் செங்குத்தாக (orthogonal) இருக்கும்.

நிரூபணம் : X, Y ஆகியவை A என்ற சமச்சீர் அணியின் λ, μ என்ற தனித்த சிறப்பியல்பு மதிப்புகளுக்குப் பொருத்தமான இரண்டு சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் என்க.

பிறகு, $AX = \lambda X$; $AY = \mu Y$

எனவே, $X^T AY = Y^T AX = \lambda Y^T X = \mu X^T Y$

அல்லது, $(\lambda - \mu) X^T Y = 0$

ஆனால், $\lambda \neq \mu$ என்பதால் $X^T Y = 0$ ஆகும்.

அதாவது, X, Y ஆகிய இரண்டு வெக்டர்களும் செங்குத்தானவை என்பதைக் காண்கிறோம்.

தேற்றம் 3: A என்ற அணியின் சிறப்பியல்பு மதிப்புக்குப் பொருத்தமான சிறப்பியல்பு வெக்டர்களும் (characteristic values) θ என்ற பூச்சிய வெக்டரும், வெக்டர் வெளியை உண்டாக்கும்.

நிரூபணம் : A அணியின் λ என்ற ஒரே சிறப்பியல்பு மதிப்புகளுக்குப் பொருத்தமான வெக்டர்கள் X, Y என்க.

பிறகு, $A(X+Y) = AX + AY = \lambda(X+Y)$

c என்ற எல்லாத் திசையிலிக்கும் $A(cX) = cAX = \lambda(cX)$

எனவே, λ என்ற சிறப்பியல்பு மதிப்புக்கு ஏற்ற சிறப்பியல்பு வெக்டர்களின் கணம், வெக்டர் கூட்டலுக்கும், திசையிலி பெருக்கலுக்கும் அடைக்கப்பட்டுள்ளது.

தேற்றம் 4: λ என்பது, A என்ற சிறப்பற்ற அணியின் (non-singular matrix) சிறப்பியல்பு மதிப்பு எனில், λ^{-1} ஆனது A^{-1}-ன் சிறப்பியல்பு மதிப்பாகும்.

நிரூபணம் : A சிறப்பற்ற அணி என்பதால்,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

A-ன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$ ஆகும்.

அல்லது $$\left| A - \lambda \frac{A \text{ சேர்ப்பு } A}{|A|} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \left| A\left(I_n - \lambda \frac{\text{சேர்ப்பு } A}{|A|}\right) \right| = 0$$

$$\Rightarrow \left| -\frac{\lambda A}{|A|}\left(\text{சேர்ப்பு } A - \frac{|A|}{\lambda} I_n\right) \right| = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda \left| \text{சேர்ப்பு } A - \frac{|A|}{\lambda} I_n \right| = 0$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\text{சேர்ப்பு } A}{|A|} - \lambda^{-1} I \right| = 0$$

$$\Rightarrow \left| A^{-1} - \lambda^{-1} I \right| = 0 \quad \left(\because A^{-1} = \frac{\text{சேர்ப்பு } A}{|A|} \right)$$

இவ்வாறாக, λ^{-1} என்பது A^{-1}-ன் சிறப்பியல்பு மதிப்பாகிறது என்பதை நிரூபிக்கிறோம்.

தேற்றம் 5: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \ldots \lambda_n$ ஆகியவை A அணியின் சிறப்பியல்பு மதிப்புகளெனில் A^2-ன் சிறப்பியல்பு மதிப்புகள்

$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots \ldots \lambda_n^2$ ஆகும்.

நிரூபணம்: $(A - \lambda I)(A + \lambda I) = A^2 + \lambda AI - \lambda IA - \lambda^2 I^2$

$$= A^2 - \lambda^2 I \ (\because AI = IA)$$

அல்லது $|A - \lambda I| \ |A + \lambda I| = |A^2 - \lambda^2 I|$

இப்பொழுது, λ_i ; $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$ ஆகியவை A-ன் சிறப்பியல்பு மதிப்புகளென்றால், $|A - \lambda_i I| = 0$

அதனால் $|A^2 - \lambda_i^2 I| = |A + \lambda_i I| \, 0 = 0$

அதாவது λ_i^2 என்பன A^2-ன் சிறப்பியல்பு மதிப்புகள் என்று தெளிவாகிறது.

தேற்றம் 6: λ என்பது A என்ற சிறப்பற்ற அணியின் சிறப்பியல்பு மதிப்பு எனில், $\frac{|A|}{\lambda}$ என்பது சேர்ப்பு A-ன் சிறப்பியல்பு மதிப்பாகும்.

நிரூபணம் : A சிறப்பற்ற அணி என்பதால்,

$AA^{-1} = AA^{-1} = I$. A-ன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$ ஆகும்.

அல்லது $\left| A - \lambda \dfrac{A \text{ சேர்ப்பு } A}{|A|} \right| = 0$

$$\Rightarrow \left| A \left(I_n \Rightarrow \lambda \frac{\text{சேர்ப்பு } A}{|A|} \right) \right| = 0$$

$$\Rightarrow \left| -\frac{\lambda A}{|A|} \left(\text{சேர்ப்பு } A - \frac{|A|}{\lambda} I_n \right) \right| = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda \left| \text{சேர்ப்பு } A - \frac{|A|}{\lambda} I_n \right| = 0$$

$$\Rightarrow \left| \text{சேர்ப்பு } A - \frac{|A|}{\lambda} I \right| = 0$$

அதாவது, $\frac{|A|}{\lambda}$ என்பது சேர்ப்பு A ன் சிறப்பியல்பு மதிப்பு என்று தெரிகிறது.

தேற்றம் 7: K என்பது திசையிலி (scalar) என்றால் KA-ன் சிறப்பியல்பு மதிப்புகள் A-ன் சிறப்பியல்பு மதிப்புகளின் K மடங்காகும்.

நிரூபணம் : λ_1 என்பது, A-ன் ஒரு சிறப்பியல்பு மதிப்பு என்றால் $|A - \lambda_1 I| = 0$.

KA-ன் சிறப்பியல்பு அணி $KA - \lambda_1 I$ ஆகும்.

$\therefore$ KA-ன் சிறப்பியல்புச் சார்பு $|(KA) - \lambda I| = 0$ ஆகும்.

அல்லது, $K^n \left| A - \frac{\lambda I}{k} \right| = 0$

அதாவது, $\left| A - \frac{\lambda I}{k} \right| = 0$ $[A = (a_{ij})_{n \times n}$, $k \neq 0$ எனில்$]$

இப்படியாக $\frac{\lambda}{k}$ என்பது A-ன் சிறப்பியல்பு மதிப்பு என்று தெரிகிறது.

அதாவது, $\frac{\lambda}{k} = \lambda_1$

அல்லது λ K λ_1 என்பது A-ன் சிறப்பியல்பு மதிப்பாகும்.

எனவே, KA-ன் சிறப்பியல்பு மதிப்பு A-ன் சிறப்பியல்பு மதிப்பின் K மடங்காகும் என்பதை நிறுவுகிறோம்.

தேற்றம் 8: $\lambda_1, \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_k$ என்பன A அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் (characteristic roots) என்றும், $X_1, X_2, \ldots,$ X_k என்பவை இம் மூலங்களின் முறையான பூச்சியமற்ற சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் என்றும் கொண்டால், $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_k$ ஆகியவை ஒருபடிச் சார்பற்றனவாக (linearly independent) இருக்கும்.

நிரூபணம் : $c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots\cdots + c_k X_k = 0$ ... (7·7) என்றிருக்குமாறு $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_k$ ஆகிய நிலையெண்களைக் (constants) கருதுக.

(7·7)-ஐ A-ஆல் பெருக்கி $AX_j = \lambda_j X_j$ என்ற தொடர்பைப் பயன்படுத்தினால்,

$$c^1 \lambda_1 X_1 + c_2 \lambda_2 X_2 + \cdots\cdots + c_k \lambda_k X_k = 0 \quad \cdots\cdots (7{\cdot}8)$$

இச் செய்கையைத் திரும்பத் திரும்பச் செய்தால்,

$$\left.\begin{array}{l} c_1 \lambda_1^2 X_1 + c_2 \lambda_2^2 X_2 + \cdots\cdots + c_k \lambda_k^2 X_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1 \lambda_1^{k-1} X_1 + c_2 \lambda_2^{k-1} X_2 + \cdots\cdots + c_k \lambda_k^{k-1} X_k = 0 \end{array}\right\} \cdots (7{\cdot}9)$$

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_k$ என்ற தெரியாத வெக்டர்களைப் பெற்றுள்ள (7·7), (7·8), (7.9) ஆகிய K சமன்பாடுகளை,

$$[c_1 X_1, c_2 X_2, \ldots c_k X_k] \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots\ldots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots\ldots & \lambda_2^{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \lambda_k & \lambda_k^2 & \ldots\ldots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix} = 0$$

என்று எழுதலாம்.

λ-க்கள் எல்லாம் சமமற்றவை என்பதால் வலப்பக்கக் காரணியான வேண்டர் மாண்டே (Vender-monde) அணி, ஒரு சிறப்பற்ற (non-singular) அணியாகும். இதன் நேர் எதிர் அணியால் வலப்பக்கமாகப் பெருக்கினுல், $[c_1X_1, c_2X_2, \ldots, c_kX_k] = 0$ என்று கிடைக்கிறது. எந்த λ-ம் பூச்சியமில்லை என்பதால் ஒவ்வொரு c-ம் பூச்சியமென்பது தெரிகிறது. இதனுல் X கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவை என்று விளங்குகிறது. இவ்வாருக, $X_1, X_2, \ldots, X_k$ ஆகிய சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார் பற்றவை என்பதை நிரூபிக்கிருேம்.

தேற்றம் 9: $(n\times n)$ தரத்தைப் பெற்ற A என்ற அணியின் பிரதியானது, அவ் அணியின் n சிறப்பியல்பு மதிப்புகளின் கூட்டலுக்குச் சமம்.

நிரூபணம்: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ என்க.

பிறகு, பிரதி $A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ ...... (1)

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ஆகியவை அணி A-ன் சிறப்பியல்பு மதிப்புகள் என்க.

பிறகு, $|A-\lambda I_n| = (-1)^n (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots\ldots(\lambda-\lambda_n)$

இப்பொழுது $|A-\lambda I_n|$-லுள்ள λ^{n-1}-ன் கெழு $= (-1)^{n+1}(\lambda_1+\lambda_2+\ldots\ldots+\lambda_n)$ ...... (2)

திரும்பவும்,

$$|A-\lambda I_n| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

இதில் λ^{n-1}-ன் கெழு $= (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ ஆகும் ... **(3)**

எனவே, (2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து,

தெளிவாக, $\sum_{i-1}^{n} a_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_n$

அதாவது, பிரதி $A = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_n$ { (1)-லிருந்து }

(நி.வே)

தேற்றம் **10 :** *சுய அடுக்கு அணியின்* (Idempotent matrix) சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் பூச்சியமாகவோ அல்லது ஒருமை (unity) யாகவோ இருக்கும்.

நிரூபணம் :

$$AX = \lambda X$$

$$A^2X = \lambda AX$$

$$= \lambda^2 X$$

ஆனால், $A^2X = AX = \lambda X$

எனவே, $\lambda^2 X = \lambda X$

ஆனால், $X \neq 0$

எனவே, $\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ அல்லது $\lambda = 1$ (நி. வே)

மாதிரி:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியைக் கருதுக.

பிறகு, $(Z^T Z) = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$, மேலும் $|Z^T Z| = 6$

$$(Z^T Z)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{14}{6} & -1 \\ -1 & \frac{3}{6} \end{bmatrix}$$

மேலும்,

$$Z(Z^T Z)^{-1} Z^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

A என்ற புதிய அணியை,

$$A = I_3 - Z(Z^TZ)^{-1}Z^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

என்று கொண்டால், A சமச்சீர் அணியாக (symmetric matrix) இருப்பதைக் காணலாம். மேலும், இது சுய அடுக்கு அணியாக, அதாவது, $A^2 = A$ என்றவாறு உள்ளது. இது மட்டுமன்றி A ன் மதிப்பிடம் 1 என்பதையும் காணலாம்.

இப்பொழுது இந்த அணியின் சிறப்பியல்பு மதிப்புகளைக் காண்போம். இதன் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு,

$$|A - \lambda I| = 0$$

அதாவது,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{6}-\lambda & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & -\frac{4}{6}\lambda & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\tfrac{1}{6}-\lambda\right)\left\{\left(\tfrac{1}{6}-\lambda\right)\left(\tfrac{1}{6}-\lambda\right)-\tfrac{4}{36}\right\} + \tfrac{2}{6}\left\{-\tfrac{2}{6}\left(\tfrac{1}{6}-\lambda\right)+\tfrac{2}{36}\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{6}\left\{\tfrac{4}{36} - \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{4}{6}-\lambda\right)\right\} = 0$$

அதாவது, $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$

இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ ஆகும்.

அதாவது, ஒரு சுய அடுக்கு அணியின் சிறப்பியல்பு மதிப்புகள் 0, அல்லது 1 என்றிருக்கும் என்பதைக் காண்கிறோம். மேலும், ஒருமை தீர்வுகளின் (unit roots) எண்ணிக்கை, அவ் வணியின் மதிப்பிடத்திற்குச் சமம் என்பதையும் காண்கிறோம்.

அதாவது, இங்கு ஒருமைத் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை 1 என்பதைக் காண்கிறோம். ($\lambda_1 = 1$ என்ற ஒரே ஓர் ஒருமைத் தீர்வு மட்டும்தான் உள்ளது) எனவே, $\rho(A) = 1$.

தேற்றம் 11: A என்பது $m \times n$ தரத்தையும், B என்பது $n \times m$ தரத்தையும் பெற்ற அணிகளெனில் பிரதி (AB) = பிரதி (BA) ஆகும்.

நிரூபணம் :

$$\begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ 0_{n,m} & \lambda I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0_{m,n} \\ B & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0_{m,n} \\ B & I_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ 0_{m\ n} & \lambda I_n - BA \end{bmatrix}$$

என்பதை எளிதில் காணலாம்.

அணிக்கோவையின் மதிப்பைக் கருதினுல்,

$$| \lambda I_m - AB | \lambda^n = | \lambda I_n - BA | \lambda^m.$$

எனவே, பூச்சியமற்ற λ ஆனது $| \lambda I_n - BA |$ ஐப் பூச்சியமாக்கினுல், அது $| \lambda I_m - AB |$ ஐயும் பூச்சியமாக்கும். அதனுல் AB, BA ஆகியவற்றின் பூச்சியமற்ற சிறப்பியல்பு மதிப்புகள் சமமாக இருக்கும் என்று தெரிகிறது. அணியின் பிரதியானது பூச்சியமற்ற சிறப்பியல்பு மதிப்புகளின் கூட்டல் என்பதால், பிரதி (AB) = பிரதி (BA) என்ற தொடர்பு நிறுவப்படுகிறது.

தேற்றம் 12: A என்பது $n \times n$ தரத்தைப் பெற்ற சிறப்பற்ற அணி என்க. U, V, ஆகியன முறையே $n \times m$, $m \times n$ தரத்தைப் பெற்று A + UV ஆனது சிறப்பற்றதாக இருக்குமாறு அமையும் அணிகளென்க.

பிறகு $| A+UV | = | A | \; | I_m + VA^{-1}U |$

நிரூபணம் : $(A + UV)^{-1} = A^{-1} \{ I_n - U(I_m + VA^{-1}U)^{-1} VA^{-1} \}$ ஆகும். .. ... (7·10)

இருபுறமும் அணிக்கோவையின் மதிப்பை மட்டும் கொண்டால்,

$$| (A + UV)^{-1} | = | A^{-1} | \; | I_n - U(I_m + VA^{-1}U)^{-1} VA^{-1} |$$

$c_1, c_2, \ldots\ldots c_n$ என்பவை $U(I_m + VA^{-1}U) VA^{-1}$-ன் சிறப்பியல்பு மதிப்புகள் என்க. இவற்றில் $c_1, c_2, \ldots c_s$ மட்டும் பூச்சியமற்றவை என்க.

பிறகு, $(I_m + VA^{-1}U)^{-1} VA^{-1}U$-ன் பூச்சியமற்ற சிறப்பியல்பு மதிப்புகள் $c_1, c_2, \ldots\ldots c_s$ ஆகும்.

இப்பொழுது,

$$\begin{aligned} &| I_n - U(I_m + VA^{-1}U)^{-1} VA^{-1} | \\ &= (1 - c_1)(1 - c_2) \ldots\ldots (1 - c_n) \\ &= (1 - c_1)(1 - c_2) \ldots\ldots (1 - c_s) \\ &= | I_m - (I_m + VA^{-1}U)^{-1} VA^{-1}U | \\ &= | (I_m + VA^{-1}U)^{-1} | \; | I_m + VA^{-1}U - VA^{-1}U | \\ &= | I_m + VA^{-1}U)^{-1} | \end{aligned}$$

இதை (7·10)-ல் பிரதியிட்டுத் தலைகீழான மதிப்புகளைக் கருதினுல் வேண்டிய முடிவு கிடைக்கிறது.

வரையறை : $(n \times n)$ என்ற ஒரே தரத்தைப் பெற்ற அணிகள் A, B எனில், அவை P என்ற சிறப்பற்ற அணி நிலைத்திருந்து $B = P^{-1} AP$ என்றிருந்தால் அவற்றை வடிவொத்த அணிகள் (similar matrices) என்று கூறுகிறோம்.

தேற்றம் 13 : வடிவொத்த அணிகளின் சிறப்பியல்பு மதிப்புகள் ஒத்தவையாக இருக்கும்.

நிரூபணம் : A, B ஆகிய இரண்டு அணிகள் வடிவொத்த அணிகளென்க. பிறகு P என்ற சிறப்பற்ற அணி நிலைத்திருந்து, $B = P^{-1} AP$ என்று அமையும். B அணியின் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு

$$\begin{aligned} 0 = |B - \lambda I_n| &= |P^{-1} AP - \lambda P^{-1} P| \\ &= |P^{-1}|\ |A - \lambda I_n|\ |P| \\ &= |A - \lambda I_n| \end{aligned}$$

இவ்வாறாக, A, B ஆகிய இரண்டு அணிகளின் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடுகளும் ஒத்துள்ளன. எனவே, வடிவொத்த அணிகளின் சிறப்பியல்பு மதிப்புகள் ஒத்தவையாக இருக்கும்.

பயிற்சி 7

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ எனில், சிறப்பியல்பு மதிப்புகளையும், சிறப்பியல்பு வெக்டர்களையும் காண்க.

2. $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ -ன் சிறப்பியல்பு மதிப்புகளையும், சிறப்பியல்பு வெக்டர்களையும் காண்க.

3. கீழ்க்காணும் அணிகளின் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடுகளைக் கண்டபின் கெய்லி—ஹாமில்டன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, இவற்றின் நேரெதிர் அணிகளைக் காண்க.

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

4. $M = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ எனில், (i) M^5, (ii) M^n ஆகிய அணிகளைக் காண்க.

5. $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ எனில், P^n ஐக் காண்க.

6. n நேர் முழு எண் எனில்,

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

என்பதை நிரூபி.

7. $$\begin{bmatrix} a & b \\ Ka & Kb \end{bmatrix}^n = (a+Kb)^{n-1} \begin{bmatrix} a & b \\ Ka & Kb \end{bmatrix}$$

என்பதை நிரூபி.

8. $$A = \begin{bmatrix} \cos ha & b\sin ha \\ \frac{1}{b}\sin ha & \cos ha \end{bmatrix}$$ எனில்,

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos hna & b\sin hna \\ \frac{1}{b}\sin hna & \cos hna \end{bmatrix}$$

என்பதை நிரூபி.

9. A, $P^{-1}AP$ ஆகிய அணிகள் ஒரே மாதிரியான சிறப்பியல்புச் சமன்பாடுகளைப் பெற்றுள்ளன என்றும், $AX = \lambda X$, $X \neq 0$ எனில், $P^{-1}X$ என்பது, λ-க்கு ஏற்ற $P^{-1}AP$-ன் சிறப்பியல்பு வெக்டர் என்பதையும் நிரூபி.

10. $AX = \lambda X$ என்பதற்கேற்ப λ என்பது அலகு வெக்டர் (unit vector) என்பதைக் காட்டுக.

11. $AX_j = \lambda_j X_j$, $j = 1, 2, \ldots\ldots, n$ என்றும், X_j-க்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவையாகவுமிருந்தால், $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ ஆகியவை A-ன் சிறப்பியல்பு மதிப்புகள் என்பதையும் நிறுவுக.

12. A-ம் A^T-ம் ஒரே மாதிரியான சிறப்பியல்பு மூலகங்களைப் பெற்றுள்ளன என்பதைக் காட்டுக.

13. $AB = BA$, $AX_0 = \lambda X_0$, $BX_0 \neq 0$ எனில் BX_0 என்பது λ என்ற சிறப்பியல்பு மூலத்திற்கு ஏற்ற A ன் சிறப்பியல்பு வெக்டர் என்பதைக் காட்டுக.

14. A^{-1}-ன் சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் A-ன் சிறப்பியல்பு வெக்டர்களுக்குச் சமம் என்பதை நிரூபி.

15. A-ன் சிறப்பியல்பு மூலகங்களும், B-ன் சிறப்பியல்பு மூலகங்களும் தெளிவானவை (listinct) என்றால், A-ம் B-ம் ஒரே மாதிரியான சிறப்பியல்பு வெக்டர்களை AB = BA என்றிருந்தால்தான் பெற்றிருக்கும் என்பதை நிரூபி.

16. X என்பது, A என்ற சிறப்பற்ற அணியின் சிறப்பியல்பு வெக்டர் எனில், A^{-1} ன் சிறப்பியல்பு வெக்டரும் X என்பதை நிரூபி.

17.
$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$ எனில், $A = (I_4 - X(X^TX)^{-1}X^T)$ ஐக் கண்டபின், A ஆனது, சுய அடுக்கு அணி என்பதையும் இதன் மதிப்பிடம், அவ்வணியின் ஒருமைச் சிறப்பியல்பு மதிப்புகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமம் என்பதையும் நிரூபி.

8. இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவைகள்
(Quadratic Forms)

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்ற n மாறிகளைக் கொண்ட சமபடித்த (homogeneous) இருபடிச் சார்பான (quadratic function)

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_i\ x_j = X^T AX \ldots\ldots \quad (8\cdot 1)$$ ஐ

இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவை (quadratic form) என்கிறோம்.

இதில், X என்பது மாறிகளின் நிரல் வெக்டர் ஆகும்.

$A = \left[\dfrac{(a_{ij} + a_{ji})}{2} \right]$ என்பது, சமச்சீர் அணியாகும் (symmetric matrix). இதனை இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையின் அணி (Matrix of the quadratic form) என்கிறோம்.

$$(8\cdot 1) \text{ ஐ } Q = X^T A X = \sum_{i=j}^{n} a_{ii}\ x_i^2 + 2 \sum_{i<j}^{n} a_{ij}\ x_i\ x_j$$

என்று எளிய முறையில் எழுதலாம்.

குறிப்பு : ஒவ்வோர் இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையையும் அணிகளின் பெருக்கற் பலனாக எழுதலாம்.

உதாரணமாக, $n = 2$ எனில்,

$$Q = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\ x_i\ x_j$$

$$= [x_1\ x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}\ x_1^2 + 2\ a_{12}\ x_1\ x_2 + a_{22}\ x_2^2$$

மாதிரி : $Q = x_1^2 - 3\ x_1\ x_2 + x_2^2 + x_1\ x_3$ என்ற இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையிலிருந்து சமச்சீர் அணியைக் காண்க.

வரையறையின்படி

$$Q = [x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2} & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = X^T AX$$

எனவே, குணக அணி (Coefficient matrix)

$$A = \begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2} & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}$$ சமச்சீர் அணியாக உள்ளது

8-A இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவைகளின் பல்வேறு பிரிவுகள் (Different classifications of quadratic forms)

நிச்சய நேர்க் கோவை (positive definite form): ஒவ்வொரு பூச்சியமற்ற X வெக்டருக்கும் (non-null vector) மெய்யான இருபடிச் சமச்சீரான $X^T A X > 0$ என்றிருந்தால், அதனை நிச்சய நேர்க் கோவை என்கிறோம்.

உதாரணமாக, $(x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2$ என்பது நிச்சய நேர்க் கோவை ஆகும்.

நிச்சய எதிர்க் கோவை (negative definite form): $-X^T AX$ ஆனது நிச்சய எதிர்க் கோவை என்கிறோம்.

உதாரணமாக, $-(x_1 - x_2)^2 - x_2^2 - x_3^2$ என்பது நிச்சய எதிர்க்கோவை ஆகும்.

அரை நிச்சய நேர்க்கோவை (Positive semi definite form): $X^TAX \geqslant 0$ ஆக இருந்து, குறைந்தது ஒரு பூச்சியமற்ற X வெக்டருக்காக வலது $X^TAX = 0$ எனில், அதனை அரை நிச்சய நேர்க் கோவை என்கிறோம்.

அரை நிச்சய எதிர்க்கோவை (Negative semi definite form): $-X^TAX$ ஆனது, நேர்க் கோவை (positive semi definite form) எனில் அதனை அரை நிச்சய எதிர்க் கோவை என்கிறோம்.

உதாரணமாக,

$$-(x_1+x_2)^2 = [x_1 x_2]\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

8-B இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையின் ஒருபடி உருவமாற்றம் (Linear transformation of quadratic form)

$Q = X^TAX$ என்ற இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையைக் கருதுக.

$X = BY$ என்ற உருவமாற்றத்தை இந்த இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவைக்குச் செய்தால்.

$$\begin{aligned} Q = X^TAX &= (BY)^T A (BY) \\ &= (Y^T B^T) A (BY) \\ &= (Y^T (B^T AB) Y \end{aligned}$$

இவ்வாறாக, $X^T AX$ என்ற இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையானது $Y^T (B^TAB)Y$ என்ற மற்றோர் இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையாகிறது. இதற்கு ஒடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவை (Reduced quadratic form) என்று பெயர். இதில் $B^T AB$ சமச்சீர் அணியாகும்.

மாதிரி :

$$Q = X^T \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

X என்ற இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையை $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Y என்ற ஒருபடி உருவமாற்றம் (linear transformation) செய்தால் $Q = Y^T (B^TAB)Y$ என்ற ஒடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவை கிடைக்கின்றது.

இங்கு,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

எனவே,

$$X^TAX = Y^T (B^T AB) Y$$

$$\Rightarrow Q_1 = [y_1\ y_2\ y_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= [y_1\ y_2\ y_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$$

8–C 'க்ரானகரி'ன் ஒடுக்கம் (Kronecker's Reduction)

தேற்றம் : r என்ற மதிப்பிடத்தை (rank) $r < n$ எனப் பெற்ற $Q = X^T A X$ என்ற மெய்யான (real) இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையில் $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ என்றும், B என்பது r மதிப்பிடத்தைப் பெற்ற சிறப்பற்ற பிரதான தலையாய கீழ்அணி (non singular leading principal sub-matrix) என்றும் இருந்தால், $X = SY$ என்ற சிறப்பற்ற ஒருபடி உருவமாற்றம் (non singular transformation) Q-ஐ,

$$Y^T \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Y$$ என்று உருவ மாற்றம் செய்கிறது. இதில்

S என்பது ஒருமை (unity) மூலகங்களை மூலை விட்டத்தில் பெற்ற சிறப்பற்ற முக்கோண அணியாகும்.

நிரூபணம் :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} [C_1, C_2, \ldots C_n]$$ என்க.

$$\text{இதில் } C_r = \begin{bmatrix} a_{1r} \\ \cdots \\ a_{nr} \end{bmatrix}$$

B என்பது r மதிப்பிடத்தைப் பெற்ற பிரதான சிறப்பற்ற கீழ்அணி என்பதால், $C_1, C_2, \ldots C_r$ என்பவை ஒருபடிச் சார்பற்றவையாகும். மேலும், A அணியின் மதிப்பிடம் r என்பதால் $C_{r+1}, \ldots\ldots C_n$ ஆகியவற்றை $C_1, C_2, \ldots C_r$ மூலம் ஒருபடியாக (linearly) அமைக்க முடியும்.

அதாவது,

$$C_p = \sum_{q=1}^{r} d_{pq} \; C_q, \qquad p = r+1, \ldots, n$$

அல்லது,

$$C_p - \sum_{q=1}^{r} d_{pq} \; C_q = 0, \quad p = r+1, \ldots, n$$

அல்லது,

$$[C_1, C_2, \ldots C_n] \begin{bmatrix} -d_{r+1,1} & \cdots & -d_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -d_{r+1,r} & \cdots & -d_{nr} \\ 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times (n \times r)}$$

$$= [0, \ldots 0]$$

அல்லது,

$$A \begin{bmatrix} -D \\ I_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ இதில் } D = \begin{bmatrix} d_{r+1,1} & \cdots & d_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{r+1,r} & \cdots & d_{nr} \end{bmatrix}$$

அல்லது,

$$\begin{bmatrix} B & W \\ W^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ I_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

இதனைச் சமன்பாடு செய்தால்

$$\left. \begin{aligned} -BD + W &= 0 \\ -W^TD + R &= 0 \end{aligned} \right\} \qquad \ldots\ldots \qquad (8{\cdot}2)$$

$$S = \begin{bmatrix} I_r & -D \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

(S என்பது ஒருமை மூலகங்களை மூலைவிட்டத்தில் பெற்ற சிறப்பற்ற அணி என்பதால் $|S| = 1$)

இப்பொழுது $X = SY$ என்ற ஒருபடி உருவமாற்றத்தால் X^TAX ஆனது, Y^TB_1Y என்று உருவமாற்றம் பெறுகின்றது.

இதில்,

$$B_1 = S^T AS = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -D^T & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & W \\ W^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & -D \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -D^T & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & -BD+W \\ W^T & -W^T C+R \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -D^T & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ W^T & 0 \end{bmatrix} \text{ (8·2) ன்படி}$$

$$= \begin{bmatrix} B & 0 \\ -D^T B+W^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \{\because \text{ (8·2)-ன்படி}$$

$$- D^T B + W^T = (BD+W^T) = 0\}$$

இவ்வாறாக $X = SY$ என்ற ஒருபடி உருவமாற்றம் $Q = X^T AX$ ஐ $Y^T B_1 Y$ என்று உருவமாற்றம் செய்கிறது.

இதில், $B_1 = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

மாதிரி :

$Q = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 48x_3^2 - 22x_2 x_3 + 4x_3 x_1 + 3x_1 x_2$ என்ற இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையைக் 'க்ரானகர்' ஒடுக்கம் மூலம் ஒடுக்குக.

கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையை,

$$Q = 2x_1^2 + \tfrac{3}{2}x_1 x_2 + \tfrac{3}{2} x_2 x_1 - 2x_2^2 - 11x_2 x_3 - 11x_3 x_2 - 48 x_3^2 + 2 x_3 x_1 + 2 x_1 x_3$$ என்று எழுதலாம்.

$$\therefore Q = X^T AX \Rightarrow Q = [x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & -2 & -11 \\ 1 & -11 & -48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

இங்கு,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & -2 & -11 \\ 1 & -11 & -48 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2(96 - 121) - \tfrac{3}{2}(-72 + 22) + 2\left(-\frac{33}{2} + 4\right)$$

$$= -50 + 75 - 25 = 0$$

ஆனால், தலையாய கீழ்அணியான $\begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$ சிறப்பற்ற அணியாக (non-singular) உள்ளது. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட இருபடி சமச்சீர்க் கோவையின் மதிப்பிடம் 2 ஆகும்.

அதனால்,

$$A\text{ஐ} \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ என்று ஒடுக்க முடியும்.}$$

B-ன் மூன்றும் நிரலை முதல், இரண்டாம் நிரல்களைக்கொண்டு அமைக்கமுடியும்.

$C_3 = a\,C_1 + b\,C_2$ என்க.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -11 \\ -48 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ -11 \end{bmatrix}$$

பிறகு, $2a + \frac{3}{2}b = 2, \quad \frac{3}{2}a - 2b = -11, \quad 2a - 11b = -48$

$$\Rightarrow \quad a = -2, \quad b = 4$$

i e; மூன்றும் நிரல் $= -2$ (முதல்நிரல்) $+ 4$ (இரண்டாம் நிரல்) அல்லது, $2C_1 - 4C_2 + C_3 = 0$

இவ்வாறாக, சிறப்பற்ற ஒருபடி உருவமாற்றமான

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \text{ ஆனது}$$

கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையை

$$[X_1\ X_2\ X_3] \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

அதாவது, $2X_1^2 + 3X_1X_2 - 2X_2^2$ என்று ஒடுக்குகிறது.

8-D 'இலக்ராஞ்ஜ்'ன் ஒடுக்கம் (Lagrange's reduction)

$$f_n = X^T AX = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots\ldots + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots\ldots (8 \cdot 3)$$

என்பது r மதிப்பிடத்தைப் பெற்ற $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ மாறிகளின் இருபடிச் சமச்சீர்க்கோவை என்க.

$$a_{11} \neq 0 \text{ எனில்,}$$

$$f_n = a_{11} X_1^2 + f_{n-1} \text{ என்று எழுதலாம்.}$$

இதில் f_{n-1} என்பது $x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ மாறிகளின் $(n-1)$ ஆம் நிலை இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையாகும்.

மேலும்,

$$X_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \ldots\ldots + \frac{a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

$$f_{n-1} = b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + \ldots\ldots + 2b_{23}x_2x_3 + \ldots\ldots \text{ என்க.}$$

$$b_{22} \neq 0 \text{ எனில்,}$$

இதனை $f_{n-1} = b_{22}X_2^2 + f_{n-2}$ என்று எழுதலாம்.

இதில், f_{n-2} என்பது, $x_3, x_4, \ldots\ldots x_n$ மாறிகளின் $(n-2)$ஆம் நிலை இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையாகும்.

$$\text{மேலும், } X_2 = x_2 + \frac{b_{23}}{b_{22}} x_3 + \ldots\ldots + \frac{b_{2n}}{b_{22}} x_n$$

இதேபோல், $C_{33} \neq 0$ எனில்

$$f_{n-2} = C_{33}X_3^2 + f_{n-3}$$

$$\text{மேலும், } X_3 = x_3 + \frac{c_{34}}{c_{33}} x_4 + \ldots\ldots + \frac{c_{3n}\; x_n}{c_{33}}$$

இதில், f_{n-3} என்பது, $x_4, x_5, \ldots\ldots x_n$ மாறிகளின் $(n-3)$ ஆம் நிலை இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையாகும்.

இம் மாதிரி தொடர்ந்து கொண்டே போனால் கடைசி விளைவு

$$f_n = d_1X_1^2 + d_2X_2^2 + \ldots\ldots + d_rX_r^2 \qquad \ldots\ldots \qquad (8 \cdot 4)$$

என்றாகிறது.

இதில், $d_1 \neq 0,\ d_2 \neq 0, \ldots\ldots d_r \neq 0$

மேலும், $X_1, X_2, \ldots X_r$ என்பது கீழ்க்காணும் உருவமாற்றமாகும்.

$$X_1 = x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{12}x_3 + \ldots\ldots + \alpha_{1n}x_n$$

$$X_2 = \quad x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots\ldots + \alpha_{2n}x_n$$

....

$$X_r = \quad x_r$$

(8·4)-ன் இருமருங்கும் $x_1\, x_2 \ldots x_n$ ஆகியவற்றால் அமைத்தால் (8·4) ஆனது ஒரு முற்றொருமையாகிறது.

இப்பொழுது, $k \leqslant r$ என்று கருதி (r என்பது X^TAX-ன் மதிப்பிடமாகும்) $x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots\ldots = x_n = 0$ என்று பிரதியிட்டால் (8·4) ஆனது,

$$f_k = d_1 Y_1^2 + d_2 Y_2^2 + \ldots\ldots + d_k Y_k^2 \qquad \ldots\ldots \qquad (8{\cdot}5)$$

என்றாகிறது. இதில், $Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_k$ ஆகியவை கீழ்க்காணும் உருவ மாற்றங்களாகும்.

$$\begin{aligned} Y_1 &= x_1 + \alpha_{12}\, x_2 + \ldots\ldots + \alpha_{1k}\, x_k \\ Y_2 &= \qquad\quad x_2 + \ldots\ldots + \alpha_{2k}\, x_k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_k &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_k \end{aligned}$$

(8·5)-ன் வலப்பக்கத்து அணிக்கோவையின் மதிப்பு, இடப்பக்கத்து அணிக்கோவையின் மதிப்புக்குச் சமம்.

அதாவது, $D_k = d_1\, d_2 \ldots\ldots d_k$

இதில்,

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots\ldots & a_{1k} \\ a_{1k} \ldots\ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

தெளிவாக,

$$D_k \neq 0 \quad \text{ஏனெனில்}\ d_k \neq 0,\ k = 1, 2, \ldots\ldots r$$

எனவே, $D_1 = d_1,\ D_2 = d_1\, d_2,\ \ldots\ldots D_r = d_1\, d_2 \ldots\ldots d_r$

$$d_1 = D_1,\ d_2 = \frac{D_2}{D_1},\ d_3 = \frac{D_3}{D_2},\ \ldots\ldots d_r = \frac{D_r}{D_{r-1}}$$

$D_1, D_2, \ldots\ldots D_r$ ஆகிய ஒவ்வொன்றும் பூச்சியமில்லை.

எனில், $f_n = D_1 X_1^2 + \dfrac{D_2}{D_1} X_2^2 + \ldots\ldots + \dfrac{D_r}{D_{r-1}} X_r^2$

8–E இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையின் செங்குத்தான ஒடுக்கம் (Orthogonal Reduction of a Quadratic form)

தேற்றம் : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_n$ என்ற சிறப்பியல்பு மூலகங்களைப் பெற்ற $Q_n = X^T AX$ என்ற இருபடிச் சமச்சீர்க்கோவையை $\lambda_1 Z_1^2 + \lambda_2 Z_2^2 + \ldots\ldots + \lambda_n Z_n^2$ என்று ஒரு செங்குத்தான உருவமாற்றம் மூலம் ஒடுக்கலாம்.

நிரூபணம் ; சமச்சீர் அணியான A-ன் நியமன வடிவத்தை (canonical form) $A = H \wedge H^T$ என்று எழுதலாம்.

இதில், H என்பது செங்குத்தணியாகும். $\wedge$ என்பது, மூலை விட்ட அணி $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_n)$ ஆகும்.

$X = HZ$ என்ற உருவமாற்றம் செய்தால்,

$$X^T AX = Z^T H^T H \wedge H^T HZ = Z^T I \wedge I Z$$

$$= Z^T \wedge Z \text{ (H செங்குத்தணி என்பதால்)}$$

$$\therefore X^T AX = \lambda_1 Z_1^2 + \lambda_2 Z_2^2 + \ldots\ldots + \lambda_n Z_n^2$$

கவனிக்கவும் : இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையின் ஒடுக்கப்பட்ட (reduced form) வடிவத்தில் நேர் கெழுக்களின் (positive coefficients) எண்ணிக்கைக்கும், எதிர் கெழுக்களின் (negative coefficients) எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள வித்தியாசத்தை, அவ் வடிவத்தின் ஸிக்னேச்சர் (signature) என்று கூறுகிறோம். இதனை σ என்று குறிப்பிடுகிறோம். P என்பது, நேர் கெழுக்களின் எண்ணிக்கை என்றும், N என்பது எதிர் கெழுக்களின் எண்ணிக்கை என்றும் கொண்டால் $P + N = r$ ($X^T AX$-ன் மதிப்பிடமாகும்) $P - N = \sigma$ ஆகும்.

மாதிரி : $Q = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_1x_2 + 12x_1x_3 + 8x_1x_4 + 18 x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4$ என்ற இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையை "இலக்ராஞ்ஜ" ஒடுக்க முறையின்மூலம் ஒடுக்குக. மேலும், P, N, r, σ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$Q = 2\left\{x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 3x_3 + 2x_4)\right\} + 5x_2^2 + x_3^2 - 24x_4^2$$
$$+ 18x_2 x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4$$

$$= 2\left\{x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 3x_3 + 2x_4) + (2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2\right\}$$
$$+ 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4$$
$$- 16x_3x_4 - 2(2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2$$

$$= 2\ (x_1+2x_2+3x_3+2x_4)^2-3[x_2^2+2x_2(x_3+4x_4)]+x_3^2 -32x_4^2-40x_3x_4$$

$$= 2\ (x_1+2x_2+3x_3+2x_4)^2-3(x_2+x_3+4x_4)^2+x_3^2-32x_4^2 -40x_3x_4+3(x_3+4x_4)^2$$

$$= 2\ (x_1+2x_2+3x_3+2x_4)^2-3(x_2+x_3+4x_4)^2 +4(x_3-2x_4)^2$$

இவ்வாறாக,

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1+2x_2+3x_3+2x_4 \\ y_2 &= x_2+x_3+4x_4 \\ y_3 &= x_3-2x_4 \\ y_4 & \quad x_4 \end{aligned}$$

என்ற உருவமாற்றத்தைப் பெறுகிறோம்.

$$i.e;\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

எனவே, $Q = 2y_1^2-3y_2^2+4y_3^2$

இங்கு, $P = 2,\ N=1,\ r = P+N=3,\ \sigma = P-N=1$

மாதிரி : $Q = x_1x_2-4x_1x_4-2x_2x_3+12x_3x_4$ என்ற இருபடிச் சமச்சீர்க்கோவையை 'இலக்ராஞ்ஜ்' ஒடுக்க முறையின் மூலம் ஒடுக்குக. மேலும், P, N, r, σ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$Q = x_1x_2-4x_1x_4-2x_2x_3+12x_3x_4$$

இங்கு x_1, x_2, x_3, x_4 ஆகியவற்றின் வர்க்கமாக (square) இல்லை என்பதால்,

$x_1 = y_1+y_2,\ x_2 = y_1-y_2,\ x_3 = y_3,\ x_4 = y_4$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$Q = (y_1+y_2)(y_1-y_2)-4(y_1+y_2)y_4-2(y_1-y_2) y_3+12y_3y_4$$

$$= \left\{ y_1^2-2y_1(y_3+2y_4)+(y_3+2y_4)^2 \right\} -y_2^2-4y_2y_4+2y_2y_3-(y_3+2y_4)^2+12y_3y_4$$

$$= (y_1 - y_3 - 2x_4)^2 \left\{ y_2^2 - 2y_2\,(y_3 - 2y_4) + (y_3 - 2y_4)^2 \right\}$$
$$- y_3^2 - 4y_4^2 + 8y_3y_4 + (y_3 - 2y_4)^2$$
$$= (y_1 - y_3 - 2y_4)^2 - (y_2 - y_3 + 2y_4)^2 + 4y_3y_4$$
$$= (y_1 - y_3 - 2y_4)^2 - (y_2 - y_3 + 2y_4)^2 + \left\{ (y_3 + y_4)^2 - (y_3 - y_4)^2 \right\}$$
$$= z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2$$

இவ்வாறாக,
$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 - y_3 - 2y_4 \\ z_2 &= y_2 - y_3 + 2y_4 \\ z_3 &= \phantom{y_1 -{}} y_3 + y_4 \\ z_4 &= \phantom{y_1 -{}} y_3 - y_4 \end{aligned}$$

அதாவது,
$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

என்ற உருவமாற்றத்தால் $Q = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2$ என்று ஒடுக்கப்படுகிறது.

$$P = 2, \quad N = 2, \quad r = P + N = 4, \quad \sigma = P - N = 0$$

மாதிரி :

$$Q = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 12x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$$

என்ற இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையைச் செங்குத்தான ஒடுக்க முறை மூலம் ஒடுக்குக.

மேலும், P, N, r, σ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$Q = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 12x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$$

$$= [\,x_1\ x_2\ x_3\,] \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= X^T AX$$

எனவே,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

இதன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு (characteristic equation)

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 & 4 \\ 6 & 3-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -5, \quad \lambda_3 = 10$$

எனவே, $Q = -2\,Z_1^2 - 5\,Z_2^2 + 10\,Z_3^2$ என்றவாறு ஒடுக்கப் பட்டுள்ளது

$$P = 1, \quad N = 2, \quad r = P+N = 3, \quad \sigma = P - N = -1$$

$Q = -2\,Z_1^2 - 5\,Z_2^2 + 10\,Z_3^2$-ன் முறையான சிறப்பியல்பு அணி களும் அவற்றின் சேர்ப்பு அணிகளும் பின்வருமாறு:

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{சேர்ப்பு } (A+2I) = \begin{bmatrix} -4 & 8 & -8 \\ 8 & -16 & 16 \\ -8 & 16 & -16 \end{bmatrix}$$

$$A+5I = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{சேர்ப்பு } (A+5I) = \begin{bmatrix} 20 & -10 & -20 \\ -10 & 5 & 10 \\ -20 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

$$A-10I = \begin{bmatrix} -8 & 6 & 4 \\ 6 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\text{சேர்ப்பு } (A-10I) = \begin{bmatrix} 80 & 80 & 40 \\ 80 & 80 & 40 \\ 40 & 40 & 20 \end{bmatrix}$$

இப்பொழுது, சிறப்பியல்பு நிரல்களின் அணி (characteristic column matrix)

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

இவற்றில் $\{1, -2, 2\}$ என்ற முதல் நிரையானது சேர்ப்பு $(A+2I)$ அணியின் நிரல்களுக்கு விகித சமமானதாகும் (proportional). இதே போன்று $\{-2, 1, 2\}$ என்ற இரண்டாம் நிரையானது, சேர்ப்பு $(A+5I)$ அணியின் நிரல்களுக்கு விகித சமமானதாகும். $\{2, 2, 1\}$ என்ற மூன்றும் நிரையானது, சேர்ப்பு $(A-10I)$ அணியின் நிரல்களுக்கு விகித சமமானதாகும். இப்பொழுது,

$$|H| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 6 \\ 2 & 6 & -3 \end{vmatrix} = -27$$

இப்பொழுது ஒரு நிரலின் குறியை மாற்றிச் சுழற்சி செய்தால்.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{(1)^2+(-2)^2+2^2}} & \frac{2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} & \frac{2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}} & \frac{-1}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}} & \frac{2}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} & \frac{-2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} & \frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

எனவே, $X = HZ \Rightarrow Z = H^{-1}X$

$\therefore\ x_1 = \frac{1}{3}(Z_1 + 2Z_2 + 2Z_3),\quad Z_1 = \frac{1}{3}(x_1 - 2x_2 + 2x_3)$

$x_2 = \frac{1}{3}(-2Z_1 - Z_2 + 2Z_3),\quad Z_2 = \frac{1}{3}(2x_1 - x_2 - 2x_3)$

$x_3 = \frac{1}{3}(2Z_1 - 2Z_2 + 2Z_3),\quad Z_3 = \frac{1}{3}(2x_1 + 2x_2 + x_3)$

8-F இருபடிச சமச்சீர்க்கோவையின் தன்மை காட்டி (Discriminant of a Quadratic form)

$Q = X^TAX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$ எனில், $|A|$ ஐ இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையின் தன்மை காட்டி என்கிறோம்.

தேற்றம் : $Q = X^T AX$ என்பது இருபடிச் சமச்சீர்க்கோவையாக $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ என்ற சமச்சீர் அணியைப் பற்று $X = CY$ என்ற உருவமாற்றத்தால் $Y^T BY$ என்று உருவமாற்றமடைந்தால் $Y^T BY$-ன் தன்மை காட்டியானது $|C|^2$ தடவை $X^T AX$-ன் தன்மை காட்டிக்குச் சமம்.

அதாவது, $|B| = |C|^2 \; |A|$

இதில், $C = [c_{ij}]_{n \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ ஆகும்.

நிரூபணம் : $Q = X^T AX$-ல், $X = CY$ என்ற உருவமாற்றம் செய்தால்,

$$X^T AX = (CY)^T ACY = (Y^T C^T) ACY$$
$$= Y^T (C^T AC) Y = Y^T BY \quad \ldots \quad (8\cdot5)$$

இங்கு $B = C^T AC$ ஆகும்.

A சமச்சீர் அணி என்பதால், B-ம் சமச்சீர் அணியாகும்.

இப்பொழுது, (8·5)-லுள்ள இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவையின்

தன்மை காட்டி
$$|B| = |C^T AC|$$
$$= |C^T| \; |A| \; |C|$$
$$= |C^T| \; |C| \; |A|$$
$$= |C|^2 \, |A| \quad (\because |C^T| = |C|)$$

(நி.வே.)

சில முடிவுகள்

1. $Q = X^T AX$ என்பது, நிச்சய நேர்க்கோவை (positive definite) எனில் $|A| > 0$

$X = BY$ என்ற, சிறப்பற்ற உருவமாற்றம் $X^T AX = Y^T (B^T AB) Y$
$$= Y^T I_n Y$$
என்றிருக்குமாறு நிலைத்திருக்கிறது.

எனவே, $B^T AB = I_n$

ஆனால், $|B^T| \; |A| \; |B| = 1$

அல்லது, $|A| = |B|^{-2} > 0$

2. $Q = X^T AX$ என்பது, நிச்சய நேர்க்கோவை எனில், A-ன் ஒவ்வொரு தலையாய சிற்றணிக் கோவையும் நேராகும் (positive).

3. $Q = X^T AX$ என்பது நிச்சிய நேர்க்கோவை, எனில், $a_{ii} > 0 \; \forall \; i = 1, 2, \ldots\ldots n$

4. $Q = X^T AX$ என்பது, அரைநிச்சய நேர்க்கோவை (positive semi definite) எனில், A-ன் ஒவ்வொரு தலையாய சிற்றணிக்கோவையின் மதிப்பும் $\geqslant 0$ ஆகும்.

5. λ-க்கள் நேராக (positive) இருந்தால், மூலைவிட்ட அணி $D[\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n]$ நிச்சய நேர்க்கோவையாகும்.

6. ஒவ்வொரு மெய்யான சிறப்பற்ற அணியான B-க்கு (ஒரே தரத்தைப் பெற்ற) $B^T AB$ சமச் சீராகவும் நிச்சய நேர்க்கோவையுமாக இருந்தால், A என்ற மெய்யான அணி சமச் சீராகவும், நிச்சய நேர்க்கோவையாகவும் இருக்கும்.

7. A என்ற மெய்யான சமச்சீர் அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் (characteristic root) நேராக இருந்தால், A ஆனது நிச்சய நேர்க்கோவை அணியாக இருக்கும்.

8. A^{-1} நிலைத்திருந்து, சமச்சீராகவும், நிச்சய நேராகவுமிருந்தால், A என்ற மெய்யான அணி சமச்சீராகவும், நிச்சய நேராகவுமிருக்கும்.

9. மெய்யான சமச்சீர் அணியான A, நிச்சய நேராக இருந்தால் A^p-ம் நிச்சயநேராக இருக்கும்.

10. B என்ற மெய்யான சிறப்பற்ற அணி, $A = B^T B$ என்றிருக்குமாறு நிலைத்திருந்தால், A என்ற மெய்யான அணி சமச்சீராகவும், நிச்சய நேராகவுமிருக்கும்.

மாதிரி: கீழ்க்காணும் இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவைகள், நிச்சய நேர்க்கோவைகள் என்பதை நிரூபி.

(i) $6x^2 + 35y^2 + 11z^2 + 34yz$

(ii) $6x^2 + 49y^2 + 51z^2 - 82yz + 20zx - 4xy$

(i) $Q = X^T AX = 6x^2 + 35y^2 + 11z^2 + 34yz$

$$= [x\ y\ z] \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 17 \\ 0 & 17 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 17 \\ 0 & 17 & 11 \end{bmatrix}$$

இதன் பிரதான, தலையாய சிற்றணிக் கோவைகள்

$$A_1 = 6,\ A_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 35 \end{vmatrix} = 210 > 0,\ A_3 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 17 \\ 0 & 17 & 11 \end{vmatrix} = 576 > 0$$

A-ன் எல்லாப் பிரதான, தலையாய சிற்றணிக் கோவைகளின் மதிப்பும் நேராக உள்ளமையால், கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமச்சீர்க்கோவை நிச்சய நேர்க்கோவையாகும்.

(ii) $Q = 6x^2 - 2xy - 2yx + 49y^2 - 41yz - 41zy + 51z^2 + 10zx + 10xz$

$$= X^T AX$$

$$= [x\ y\ z] \begin{bmatrix} 6 & -2 & 10 \\ -2 & 49 & -41 \\ 10 & -41 & 51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

இதில்,

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 10 \\ -2 & 49 & -41 \\ 10 & -41 & 51 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = 6 > 0,\ A_2 = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 49 \end{vmatrix} > 0$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 10 \\ -2 & 49 & -41 \\ 10 & -41 & 51 \end{vmatrix} > 0$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமச்சீர்க்கோவை, நிச்சய நேர்க்கோவையாகும்.

8-G மெய்யான இருபடிச் சமச்சீர்க்கோவையின் நிச்சய நேர்க் கோவை (Positive definiteness of a real Quadratic form)

$Q = X^TAX = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$ என்ற மெய்யான இருபடிச் சமச்சீர்க்கோவை, நிச்சய நேர்க்கோவையாக இருக்க வேண்டுமானால்,

$$g_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0 \ \forall\ i = 1,\ 2, \ldots n$$

என்றிருத்தல் வேண்டும்,

நிரூபணம் :

வேண்டிய நிபந்தனை (Necessary condition):

X^TAX நிச்சய நேர்க்கோவை எனில், $X^TAX \Longleftrightarrow Y^T B^T ABY = Y^T Y = y_1^2 + \dots + y_n^2$ என்றிருக்குமாறு $X = BY$ என்ற ஒரு சிறப்பற்ற உருவமாற்றம் (non-singular transformation) நிலைத்திருக்கும்.

அதாவது, $B^TAB = I$, $|B^TAB| = |B|^2 |A| = |I| = 1$
எனவே, $|B|^2 g_n > 0$ அல்லது $g_n > 0$

x_n என்ற கடைசி மாறியைப் பூச்சியமாகக் கொண்ட இருபடிச் சமச்சீர்க்கோவையைக் கருதினால், அது $(n-1)$ மாறிகளைக் கொண்ட நிச்சய நேர்க்கோவையாகும். எனவே, முன்சொன்ன வாதத்தின்படி அணியின் அணிக்கோவையான $g_{n-1} > 0$. இது வேண்டிய நிபந்தனையை நிலைநாட்டியுள்ளது.

போதிய நிபந்தனை (Sufficient condition): $a_{11} > 0$ என்பதால், A-ன் முதல் நிரை, நிரல்கள் தொடக்கத்திற்குரிய அணிகளினால் முன், பின் பெருக்கல் செய்வதால் சமச்சீராகப் பரப்பப்பட்டு (swept out) கீழ்க் காணுமாறு அமைகின்றன.

அதாவது,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

என்றவாறு அமைகிறது. இங்கு $a_{11} b_{22} = g_2$ {ஏனெனில், எந்தக் கீழ் அணிக்கோவையின் மதிப்பும் (முதல் நிரை, நிரலையும் சேர்த்து) மாறுவதில்லை}.

$g_2 > 0$ என்பதால், $b_{22} = \dfrac{g_2}{g_1} > 0$

b_{22} ஐச் சுழற்சித் தானமாகப் (pivot) பயன்படுத்தினால் இரண்டாம் நிரையும், நிரலும் சமச்சீராக (symmetrically) பரப்பப்பட்டு (swept out)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ . & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ . & . & . & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

என்றவாறு அமைந்துள்ளது.

இங்கு, $a_{11}\, b_{22}\, c_{33} = g_3 > 0$

எனவே, $c_{33} = \dfrac{g_3}{g_2} > 0$

இம்முறையைத் தொடர்ந்து செய்துகொண்டே போனால்,

$$\begin{bmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{g_2}{g_1} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{g_n}{g_{n-1}} \end{bmatrix}$$ என்று கிடைக்கிறது.

இதில் மூலைவிட்ட மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றும் நேராக (positive) உள்ளது. இவ்வாருக, அணி B-ன் நிலைப்பாட்டை (existence) காண்பித்துள்ளோம்.

அணி B என்பது,

$$B^T AB = \triangle = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{g_2}{g_1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{g_n}{g_{n-1}} \end{bmatrix}$$

என்றிருக்குமாறு நிரல்களைப் பரப்புவதற்குப் பயன்படுத்தப்பட்ட (used in sweeping out the columns) தொடக்கத்திற்குரிய அணிகளின் (elementary matrices) பெருக்கலாகும்.

எனவே, $X = BY$, $X^T AX$ ஐ

$$g_1 y_1^2 + \frac{g_2}{g_1} y_2^2 + \dots\dots + \frac{g_n}{g_{n-1}} y_n^2$$ என்று உருவமாற்றம் செய்துள்ளது. இது நிச்சய நேர்க் கோவையாகும்.

இவ்வாருக, போதிய நிபந்தனையும் நிலைநாட்டப்பட்டுள்ளது.

8-H நிச்சய நேர்க் கோவைகள் - ஒருபடி நிபந்தனைகளின்கீழ் (Positive definite forms under Linear conditions)

உதாரணங்கள்மூலம் பொதுவகையைப் (general case) பற்றி விவாதிப்போம்.

முதல் உதாரணமாக, $f_2 = ax^2 + 2hxy + by^2$ ... (8·6) எங்க.

இதில், x, y, ஆகியவை $lx + my = 0$ ...... (8·7) என்ற தொடர்பைத் திருப்தி செய்கின்றன.

l, m ஆகிய கெழுக்கள் இரண்டும் பூச்சியமாக இருக்கமாட்டா.

$m \neq 0$ எனில், $y = -\dfrac{lx}{m}$ என்று (8·6)-ல் பிரதியிட்டால்,

முடிவில் காணும் வடிவம் $f_1 = \alpha_{11} x^2$ ஆகும். f_2 ஆனது நிச்சய நேர்க் கோவையாக $lx + my = 0$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட வேண்டுமாயின் $\alpha_{11} > 0$ என்றிருத்தல் அவசியமாகிறது.

அதாவது, $bl^2 + am^2 - 2\,hlm > 0$

இதை f_n-க்குச் செயல்படுத்த இப்பொழுது,

$$f_3 = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2(lx+my)t \qquad \text{......} \quad (8·7)$$

என்று அமைப்போம்.

yஐ (8·7), (8 6) ஆகியவற்றிலிருந்து நீக்குவது, என்பது, (8·5), ஆகியவற்றிலிருந்து y ஐ நீக்குவதற்குச் சமம் ஆகும்.

இப்பொழுது, f_3-ல் $X = x$, $Y = lx + my$, $T = t$ (8·8) என்று பிரதியிட்டு உருவமாற்றம் செய்தால்,

$$F_3 = \alpha_{11}X^2 + 2\alpha_{12}XY + \alpha_{22}Y^2 + 2YT \qquad \text{......} \quad (8·9)$$

yஐ நீக்க, $Y = 0$ என்று செய்தால்,

$$F_1 = \alpha_{11} X^2 \qquad \text{......} \quad (8·10)$$

இப்பொழுது (8·8)-லுள்ள உருவமாற்றம் $m \neq 0$ என்று ஒழுங்கானதாக (regular) அமைந்துள்ளது. எனவே, f_3, F_3 ஆகியவற்றின் தன்மை காட்டிகளை (discriminants)

$$\begin{vmatrix} a & h & l \\ h & b & m \\ l & m & 0 \end{vmatrix} = m^2 \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\,m^2\,\alpha_{11} \quad .. \quad (8·11)$$

என்று தொடர்புபடுத்துகிறோம்.

தேற்றம் : $ax^2 + 2hxy + by^2$ என்ற இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவை $lx + my = 0$ $(m \neq 0)$ என்ற நிபந்தனையின்பேரில் நிச்சய

நேர்க்கோவையாக (positive definite) இருப்பதற்காக வேண்டிய போதிய நிபந்தனை (necessary and sufficient condition).

$$\begin{vmatrix} a & h & l \\ h & b & m \\ l & m & 0 \end{vmatrix} < 0 \text{ ஆகும்.}$$

இரண்டாம் உதாரணமாக,

$f_3 = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$ என்ற இருபடிச் சமச்சீர்க்கோவை $lx + my + nz = 0$ என்ற நிபந்தனைக்கு நிச்சய நேர்க்கோவையாக இருப்பதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனைகளைக் காணவேண்டும். l, m, n என்ற கெழுக்கள் எல்லாம் பூச்சியமாக இரா. $n \neq 0$ எனில், f_3 ஆனது $lx + my + nz = 0$ $(n \neq 0)$ என்ற நிபந்தனையின் பேரில் நிச்சய நேர்க்கோவையாக இருப்பதற்கான வேண்டிய, போதிய நிபந்தனை,

$$\begin{vmatrix} a & g & l \\ g & c & n \\ l & n & 0 \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} < 0$$

ஆகும் (மேற்சொன்ன வழிமுறைமூலம் நிரூபிக்கவும்).

துணைமுடிவு : $lx + my + nz = 0$ $(n \neq 0)$ என்ற நிபந்தனைக்கு f_3 ஆனது, நிச்சய எதிர்க் கோவையாக இருப்பதற்கு வேண்டிய, போதிய நிபந்தனைகள்

$$\begin{vmatrix} a & g & l \\ g & c & n \\ l & n & o \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a & h & g & 1 \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & o \end{vmatrix} < 0 \text{ ஆகும்.}$$

வரையறை : A என்ற அணி $m \times n$ தரத்தைப் பெற்ற அணி எனில், பிறகு, $n \times n$ தரத்தைப் பெற்ற $A^T A$ என்ற அணியை A அணியின் கிராம் அணி (Gram matrix) என்று கூறுகிறோம்.

தேற்றம் : ஒவ்வொரு சமச்சீர் அணியும், கிராம் அணியாக இருந்தால், அவை நிச்சய நேர்க்கோவையாகவோ அல்லது அரை நிச்சய நேர்க்கோவையாகவோ இருக்கும்.

நிரூபணம் : A அணியின் கிராம் அணியான $A^T A$ ஆனது, குறைந்தபட்சம் அரை நிச்சய நேர்க்கோவையாக இருக்கும்.

தெளிவாக, Y என்ற எந்த $m \times 1$ நிரல் வெக்டருக்கும் $Y^T A^T AY = (AY)^T AY \geqslant 0$ என்றிருக்கும். குறைந்தது, B என்ற அணி $n \times n$ தரத்தைப் பெற்ற அரை நிச்சய நேர்க்கோவை என்க. பிறகு P என்ற சிறப்பற்ற அணி,

$$P^T B P = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{bmatrix}$$

என்றிருக்குமாறு நிலைத்திருக்கும். இங்கு r என்பது, B அணியின் மதிப்பிடமாகும் (rank).

பிறகு,

$$B = (P^T)^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{bmatrix} P^{-1} = Q^T Q$$

இங்கு,

$$Q = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{bmatrix} P^{-1} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, B ஆனது கிராம் அணி என்று தெளிவாகிறது.

பயிற்சி 8

1. கீழ்க்காணும் இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவைகளின் அணிகளைக் காண்க.

(i) $x_1^2 + 6x_1x_2 - 10x_1x_3 + 4x_3^2$

(ii) $2x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 - 5x_3^2$

(iii) $-x_1^2 + 6x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2$

2. P, N, r, σ ஆகியவற்றைக் காண்க

(i) $f_2 = x_1x_2$

(ii) $f_3 = x_1x_2 + x_1x_3$

(iii) $f_4 = x_1x_2 + x_3x_4$

(iv) $f_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

(v) $f_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$

(vi) $f_4 = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$

3. 'இலக்ராஞ்ஜி'ன் ஒடுக்க முறையின்மூலம் கீழ்க்காணும் இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவைகளை ஒடுக்குக.

(i) $f_3 = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 12x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$

(ii) $f_3 = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

(iii) $f_3 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

4. $x_1 = X_2 = X_3$, $x_2 = X_1 + X_2 + X_3$, $x_3 = X_3$ என்ற உருவமாற்றத்தினால் $7x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 - 4x_1x_2 + 18x_1x_3 - 8x_2x_3$ என்ற இருபடிச் சமச்சீர்க்கோவை $2x_1^2 + 5x_3^2 - 3x_2^2$ என்று ஒடுக்கப்படுகிறது என்பதைக் காட்டுக.

(i) 'இலக்ரான்ஜி ன் முறையினால் ஒடுக்கப்பட்ட வடிவம் இரண்டு நேர்கெழுக்களையும், ஓர் எதிர் கெழுவையும் பெற்றுள்ளது என்பதைக் காட்டுக.

(ii) செங்குத்தான உருவமாற்றம் செய்தாலும் ஒடுக்கப்பட்ட வடிவம் இரு நேர் கெழுக்களையும் ஓர் எதிர் கெழுவையும் பெற்றுள்ளது என்பதைக் காட்டுக.

5. $x = HZ$ என்ற சுழற்சியினால், $f_4 = 4x_1x_2 + 6x_2x_3 + 4x_3x_4$ என்ற இருபடிச் சமச்சீர்க்கோவை $4z_1^2 - 4z_2^2 + z_3^2 - z_4^2$ என்று ஒடுக்கப்பட்டுள்ளது என்பதையும்,

$$H = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$ என்பதையும் காட்டுக.

6. $x = HZ$ என்ற சுழற்சியினால் $x_1^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ என்ற இருபடிச் சமச்சீர்க்கோவை $3(z_1^2 - z_2^2 - z_3^2)$ என்று செங்குத்தாக ஒடுக்கப்படுகிறது என்பதைக் காட்டுக.

7. கீழ்க்காணும் இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவைகள் நிச்சய நேர்க் கோவையா, அரை நிச்சய நேர்க்கோவையா, அல்லது இரண்டு மல்லாததா என்பதைக் கூறுக.

(i) $x^2 + y^2 - xy$

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy$

(iii) $2x^2 + 6xy + 3y^2$

(iv) $x^2 + y^2 + z^2 + yz - zx - xy$

(v) $-3x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 2yz + zx + 7xy$

(vi) $9x^2 + y^2 + 4z^2 + 6xy - 12xy - 4yz$

8. $x + y + z = 0$ என்ற நிபந்தனைக்கு $yz + zx + xy$ என்ற இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவை நிச்சிய எதிர்க் கோவை என்பதைக் காட்டுக. இதற்கான வேண்டிய, போதிய நிபந்தனைகளைச் சரி பார்க்கவும்.

திட்டமான வேறுபாடுகள்

(Finite Differences)

1. வேறுபாடுகளும் செயலிகளும்
(Differences and Operators)

முன்னுரை

சார்பற்ற மாறியின் (independent variable) மாறுதலினால், சார்பின் மதிப்பில் ஏற்படக்கூடிய மாறுதல்களைப்பற்றி அமைவதே திட்டமான வேறுபாட்டு நுண் கணிதமாகும் (Calculus of finite differences). இது திட்டமான (finite) சம அல்லது அசம இடைவெளியைப் (equal, unequal interval) பெற்ற சார்பற்ற மாறியில் அவ்வப்போது ஏற்படும் மாறுதலுக்கும், அதன்சார்பின் மதிப்புக்கும் இடையேயுள்ள உறவைப்பற்றிய அமைப்பாகும்.

கழிவேறுபாட்டு நுண்கணிதத்தில் (Infinitesimal calculus) சார்பற்ற மாறியில் ஏற்படும் தொடர்ச்சியான இடைவெளி மாற்றத்தினால் ஏற்படக்கூடிய ஒரு நிலையைக் காணலாம். இந்த அத்தியாயத்தில் சார்பற்ற மாறியில் சம இடைவெளி மாற்றத்தினால் சார்பிற்கு ஏற்படும் மாறுதல்களைப்பற்றிக் காண்போம்.

$$Y = f(x)$$

என்ற சார்பில் x-என்னும் சார்பற்ற மாறி (argument) என்றும் அதன் பொருந்திய சார்புள்ள மாறியின் மதிப்புகளுக்குச் சார் பலன் (entry) மதிப்பு என்றும் கூறுகிறோம்.

அடுத்தடுத்துள்ள சார்பற்ற மாறிகளின் வேறுபாட்டிற்கு இடைவெளியின் வேறுபாடுகள் (Interval of differencing) என்று பெயர்.

$$\left\{f(a+h)-f(a)\right\}, \quad \left\{f(a+2h) - f(a+h)\right\},$$

$\left\{f(a+3h) - f(a+2h)\right\}$ ... *etc.* என்பது $y = f(x)$-ன் முதல் நிலை வேறுபாடுகளாகும் (first differences).

இவற்றை முறையே $\Delta f(a)$, $\Delta f(a+h)$, $\Delta f(a+2h)$ ... etc. என்று Δ என்ற செயலி மூலம் குறிப்பிடுகிறோம்.

அதாவது,

$$\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$$
$$\Delta f(a+h) = f(a+2h) - f(a+h)$$
$$\Delta f(a+2h) = f(a+3h) - f(a+2h) \text{ etc.}$$

முதல் நிலை வேறுபாடுகளின் வேறுபாடுகளுக்கு இரண்டாம் நிலை வேறுபாடுகள் என்று கூறுகிறோம். இதனை, $\Delta^2 f(a)$, $\Delta^2 f(a+h)$ $\Delta^2 f(a+2h)$ ... etc. என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

விளக்கமாக இதனை,

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(a) &= \Delta f(a+h) - \Delta f(a)\\ &= f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)\\ \Delta^2 f(a+2h) &= \Delta f(a+2h) - \Delta f(a+h)\\ &= f(a+3h) - 2f(a+2h) + f(a+h) \text{ etc.}\end{aligned}$$

என்று எழுதலாம்.

இதுபோன்றே மூன்றாம்நிலை வேறுபாடு என்பது, இரண்டாம் நிலை வேறுபாடுகளின் வேறுபாடுகளாகும்.

இதனை $\Delta^3 f(a)$, $\Delta^3 f(a+h)$, $\Delta^3 f(a+2h)$ ... etc. என்று குறிப்பிடுகிறோம். அதாவது,

$$\begin{aligned}\Delta^3 f(a) &= \Delta^2 f(a+h) - \Delta^2 f(a)\\ \Delta^3 f(a+h) &= \Delta^2 f(a+2h) - \Delta^2 f(a+h)\\ \Delta^3 f(a+2h) &= \Delta^2 f(a+3h) - \Delta^2 f(a+2h) \text{ etc.}\end{aligned}$$

இவற்றைப் பின்வரும் முடிவுள்ள வேறுபாட்டு (finite differences) அட்டவணை மூலம் குறிப்போம்.

அட்டவணை (முடிவுள்ள வேறுபாட்டு அட்டவணை)

சார்புமாறி x	சார்பலன் $y = f(a)$	முதல் நிலை வேறுபாடு	இரண்டாம் நிலை வேறுபாடு	மூன்றாம் நிலை வேறுபாடு	நான்காம் நிலை வேறுபாடு
a	$f(a)$				
		$\Delta f(a)$			
$a+h$	$f(a+h)$		$\Delta^2 f(a)$		
		$\Delta f(a+h)$		$\Delta^3 f(a)$	
$a+2h$	$f(a+2h)$		$\Delta^2 f(a+h)$		$\Delta^4 f(a)$
		$\Delta f(a+2h)$		$\Delta^3 f(a+h)$	
$a+3h$	$f(a+3h)$		$\Delta^2 f(a+2h)$		
		$\Delta f(a+3h)$			
$a+4h$	$f(a+4h)$				

இந்த அட்டவணையில் $f(a)$ என்பது, வழிகாட்டி சார்பலனாகும் (leading entry). $\Delta f(a)$, $\Delta^2 f(a)$, $\Delta^3 f(a)$ ... என்பவை வழி காட்டி வேறுபாடுகளாகும் (leading differences).

எடுத்துக்காட்டாக, கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் x என்ற சார்பற்ற மாறியின் மதிப்புகளுக்குரிய சார்பு,

$y = f(x) = e^{-x}$-ன் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

முற்பட்ட சார்பலனைப் பிற்பட்ட சார்பலனிலிருந்து கழித்தால், முதல்நிலை வேறுபாட்டைப் பெறலாம். இதுபோன்றே முற்பட்ட முதல்நிலை சார்பலனைப் பிற்பட்ட முதல்நிலை சார்பலனிலிருந்து கழித்தால், இரண்டாம்நிலை சார்பலன்களைப் பெறலாம். இவ்வாறாக, முழுமைபெற்ற வேறுபாட்டு அட்டவணையைக் கீழே காண லாம். இங்கு $h = 0{\cdot}5$ ஆகும். a என்பது $0{\cdot}5$ ஆகும்.

x	$y=e^{-x}$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0·5	0·6065				
		−0·2386			
1·0	0·3679		0·0938		
		−0·1448		−0·0368	
1·5	0·2231		0·0570		0·0144
		−0·0878		−0·0224	
2·0	0·1353		0·0346		
		−0·0532			
2·5	0·0821				

தேற்றம் 1 : சார்பற்ற மாறியின் மதிப்புகள் சமமான இடைவெளியில் இருக்கும்பொழுது, nஆம் படிவவிகிதமுறு முழுவெண் சார்பின் (rational integral function) அல்லது பல்லுறுப்பின் (polynomials) nஆம் படிவ வேறுபாடுகள் நிலைஎண்ணாக இருக்கும்.

நிரூபணம் :

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots\ldots + kx + l$$

என்பது, nஆம் படிவ விகிதமுறு முழுவெண் சார்பு என்க. n என்பது நேர்முக முழு எண்ணாகவும், $a, b, c, \ldots\, l$ என்பவை நிலை எண்களாகவும் இருக்கட்டும். மேலும் $a \neq 0$.

அதனால்,

$$f(x+h) = a(x+h)^n + b(x+h)^{n-1} + c(x+h)^{n-2} + \ldots\ldots + k(x+h) + l$$

∴ எனவே,

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) \\ &= a[(x+h)^n - x^n] + b[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] \\ &\quad + \ldots\ldots + kh \\ &= anhx^{n-1} + b^1 x^{n-2} + c^1 x^{n-3} + k^1 x + l^1\end{aligned}$$

இங்கு, $b', c' \ldots\ldots l'$ என்பவை x-ன் சார்பற்ற நிலையெண் கெழுக்களாகும் (constant coefficients). இவ்வாறாக முதல்நிலை வேறுபாடு $(n-1)$ஆம் படிவிகிதமுறு முழுஎண் சார்பாக இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

∴ $f(x)$-ன் இரண்டாம்நிலை வித்தியாசம்,

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x) &= \Delta[\Delta f(x)] = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \\ &= anh[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] + b^1[(x+h)^{n-2} - x^{n-2}] \\ &\quad + \ldots\ldots + k^1 h \\ &= an(n-1)h^2 x^{n-2} + b'' x^{n-3} + \ldots\ldots + k''\end{aligned}$$

இவ்வாறாக இரண்டாம்நிலை வேறுபாடும், $(n-2)$ஆம் படிவிகித முறு எண் சார்பாக இருப்பதைக் காண்கிறோம். தொடர்ச்சியாக, இதுபோல் செயல்படின் nஆம் நிலை வேறுபாடு

$$\begin{aligned}\Delta^n f(x) &= a[n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1]\,h^n x^{n-n} \\ &= ah^n (n!)\end{aligned}$$

இங்கு $ah^n(n!)$ என்பது நிலை எண் என்பதை அறிக

எனவே, nஆம் நிலை வேறுபாடு நிலையெண் என்றும், $(n+1)$-க்கும் அதற்கும் மேற்பட்ட உயர்நிலைக்குமான வேறுபாடுகள் பூச்சியம் என்றும் அறிகிறோம்.

மறுதலைத் தேற்றம் :

சார்பற்ற மாறியின் மதிப்புகளின் இடைவெளிகள் சமமாக இருந்து அட்டவணைப்படுத்தப்பட்ட சார்பின் nஆம்நிலை வேறுபாடுகள் நிலையெண் என்றால், சார்பு nஆம் படிவ பல்லுறுப்புக் கோவையாக இருக்கும்.

குறிப்பு: மேற்குறிப்பிட்ட தேற்றம் பல்லுறுப்புக் கோவை (polynomial களுக்குத்தான் பொருந்தும். மற்றச் சார்புகளுக்குப் பொருந்தாது.

உதாரணமாக,

$$f(x) = \sin x$$

இது x-ன் பல்லுறுப்புக் கோவையன்று. அடுத்தடுத்த வேறுபாடுகள்.

$$\triangle f(x) = \sin(x+h) - \sin x$$

$$\triangle^2 f(x) = \sin(x+2h) - 2\sin(x+h) + \sin x$$

இங்கு $\sin x$ என்ற சார்பு முடிவாகக் குறைக்கப்பட முடியவில்லை. மேலும் e^x என்ற சார்பும் இதுபோன்றேயுள்ளது.

மாதிரி 1:

$f(x)$ என்பது x-ன் பல்லுறுப்புக் கோவையாக இருந்து, அதன் மதிப்புகள் பின்வருவன என்றால் $f(x)$ஐக் காண்க.

$$f(2) = f(3) = 27, \quad f(4) = 78, \quad f(5) = 169$$

x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$
2	27			
		0		
3	27		51	
		51		−11
4	78		40	
		91		
5	169			

$\triangle^3 f(x)$ நிலையெண்ணாக இருப்பதை அறிகிறோம். எனவே, $f(x)$ மூன்றாம்நிலை சார்பாகும். எனவே, தேற்றம் 1-ன்படி,

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ எனக் காண்க.}$$

அதனால்,

$$f(2) = 27 = a(2^3) + b(2^2) + c(2) + d$$

$$f(3) = 27 = a(3^3) + b(3^2) + c(3) + d$$

$$f(4) = 78 = a(4^3) + b(4^2) + c(4) + d$$

$$f(5) = 169 = a(5^3) + b(5^2) + c(5) + d$$

மேலுள்ள சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தால், நாம் பெறுவது

$$a = \frac{-11}{6}, \; b = 42, \quad c = \frac{-1051}{6}, \; d = 224$$

இப்படியாக,

$$f(x) = \frac{1}{6} \left(-11\, x^3 = 252\, x^2 - 1051\, x + 1344\right)$$

மாதிரி 2 :

மதிப்பிடுக.

(i) $\triangle^2 \left[\frac{a^{2x} + a^{4x}}{(a^2-1)^2} \right]$

(ii) $\triangle \tan^{-1} ax$

(iii) $\triangle \log x$

(iv) $\triangle \cot 2^x$

(i) $\triangle a^{2x} = a^{2(x+h)}\ a - {}^{2x}$, இடைவெளி வேறுபாடு எனக் கொள்க.

$$= a^{2x} (a^{2h} - 1)$$

இவ்வாறாக,

$$\triangle^n a^{mx} = a^{mx} (a^{2h} - 1)^n$$

எனவே,

$$\triangle^2 \left[\frac{a^{x2} + a^{4x}}{(a^2-1)^2}\right] = \frac{1}{(a^2-1)^2} \left[a^{2x} (a^{2h}-1)^2 + a^{4x} \ (a^{4h}-1)^2\right]$$

(ii) $\triangle \tan^{-1} ax = \tan^{-1} a(x+h] - \tan^{-1} ax$

$$= \tan^{-1} \left\{ \frac{ax + ah - ax}{1 + (ax+ah)ax} \right.$$

$$= \tan^{-1} \left\{ \frac{ah}{1 + a^2 \ (x^2 + x^h} \right\}$$

(iii) $\triangle \log x = \log (x+h) - \log x$

$$= \log \left\{ \frac{x+h}{x} \right\} = \log \left\{ 1 + \frac{h}{x} \right\}$$

$$= \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(iv) $\triangle \cot 2^x = \cot 2^{(x+h)} - \cot 2^x$

$$= \frac{\cos 2^{(x+h)}}{\sin 2^{(x+h)}} - \frac{\cos 2^x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{\cos 2^{x+h} \sin 2^x - \cos 2^x \sin 2^{x+h}}{\sin 2^{x+h} \sin 2^x}$$

$$= \frac{\sin (2^x - 2^{x+h})}{\sin 2^{x+h} \sin 2^x}$$

மாதிரி 3.1

(i) $f(x) = ab^{cx}$ என்ற சார்பின் அடுத்தடுத்த வேறுபாடுகளைக் கண்டு முதல்நிலை n வேறுபாடுகளைக் கூட்டுக.

$$\triangle f(x) = ab^{c(x+1)} - ab^{cx}$$

$$= ab^{cx} [b^c - 1]$$

$$\triangle^2 f(x) = [ab^{c(x+1)} - ab^{cx}] (b^c - 1)$$

$$= ab^c x (b^c - 1)^2$$

இவ்வாறாக,

$$\triangle^n f(x) = ab^{cx} (b^c - 1)^n$$

இப்பொழுது,

$$\sum_{x=1}^{n} \triangle f(x) = ab^{cx} (b^c - 1) \left[1 + (b^c - 1) + (b^c - 1)^2 + \dots\dots\dots + (b^c - 1)^{n-1} \right]$$

$$= ab^{cx} (b^c - 1) \left\{ \frac{1 - (b^c - 1)^n}{1 - (b^c - 1)} \right\}$$

$$= \frac{ab^{cx} (b^c - 1)}{(b^c - 2)} \left\{ (b^c - 1)^n - 1 \right\}$$

காரணீயப் பெருக்கின் குறியீடு (Factorial notation)

தொடர்ச்சியான காரணப் பகுப்பின் முதல் பகுப்பு x என்றும் அதற்கு அடுத்த பகுப்புகள் h என்னும் நிலையெண்ணாக முறையே குறைந்திருந்தால், அதனைக் காரணீயப் பெருக்கம் (factorial)' என்று கூறுகிறோம். இதனை $x^{(r)}$ என்று குறிக்கிறோம். இதில் 'r' என்பது நேர்முக முழு எண்ணாகும்.

எனவே,

$$x^{(r)} = x(x-h)(x-2h)(x-3h) \ldots\ldots (x-\overline{r-1}h)$$

சிறப்பாக, $h = 1$ எனில்,

$$x^{(r)} = x(x-1)(x-2)(x-3) \ldots\ldots (x-\overline{r-1})$$

இதில் r காரணிப் பகுப்புகள் உள்ளன.

இப்பொழுது,

$$\triangle x^{(r)} = [(x+1)(x)(x-1)(x-2) \ldots (x-r+2)]$$
$$- [x(x-1)(x-2)(x-3) \ldots (x-r+1)]$$

இங்கு,

$$x^{(r)} = x(x-1) \ldots\ldots\ldots (x-\overline{r-1}) \text{ ஆகும்.}$$
$$= x(x-1)(x-2) \ldots (x-r+2)[(x+1)-(x-r+1)]$$
$$= x(x-1)(x-2) \ldots (x-r+2)[r]$$
$$= r\, x^{r-1}$$

[சார்புகளின் முதல்நிலை வேறுபாட்டைக் காரணியக் குறியீடு மூலம் அமைப்பதென்பது, சார்புகளை ஒருமுறை வகையீடு (differenciation of function) செய்வதற்கு ஒத்ததாகவுள்ளது என்பதை நாம் காண்கிறோம். ஏனெனில், $\frac{d}{dx} x^r = r\, x^{r-1}$]

மேலும்,
$$\triangle^2 x^r = \triangle\, r x^{(r-1)}$$
$$= \triangle\, r x^{(r-1)}$$
$$= \triangle\, r[x(x-1)(x-2) \ldots\ldots (x-r+2)]$$
$$= r\left[\left\{(x+1)\,x\,(x-1) \ldots (x-r+3)\right\}\right.$$
$$\left. - \left\{x(x-1)(x-2) \ldots (x-r+2)\right\}\right]$$
$$= r x(x-1)(x-2) \ldots (x-r+3)(r-1)$$
$$= r(r-1)\, x^{(r-2)}$$

இஃது ஒரு சார்பை இரண்டுமுறை வகையீடு செய்வதற்கு ஒத்ததாக உள்ளது.

ஏனெனில், $$\frac{d^2}{dx^2}(x^r) = r(r-1)x^{r-2}$$

பொதுவாக,

$$\Delta^r x^{(r)} = r(r-1)(r-2)\ldots 2\cdot 1 = r!$$

மேலும்,

$$x^{(r)} = x(x-1)\ldots(x-r+2)(x-r+1) \quad \ldots \quad (1)$$

அல்லது, $x^{(r)} = (x-r+1)\,x^{(r-1)}$

இப்பொழுது, சமன்பாடு (1)-ல் $r = 0$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore x^{(0)} = (x+1)\,x^{(-1)}$$

அதாவது, $1 = (x+1)\,x^{(-1)}$ [$\because x^{(0)} = 1$]

$$\text{i.e.} \quad x^{(-1)} = \frac{1}{x+1}$$

இப்பொழுது சமன்பாடு (1)-ல் $r = -1$ எனில்,

$$x^{(-1)} = (x+2)\,x^{(-2)}$$

ஆகவே,

$$x^{(-2)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

இவ்வாறாக,

$$x^{(-3)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

பொதுவாக,

$$x^{(-r)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+r)}$$

இங்குப் பகுதியில் r காரணிப் பகுப்புகள் உள்ளன.

இப்பொழுது,

$$\Delta x^{(-r)} = \frac{1}{(x+2)(x+3)\ldots(x+r+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+r)}$$

$$= \frac{1}{(x+2)(x+3)\ldots(x+r)}$$

$$\left[\frac{1}{(x+r+1)} - \frac{1}{x+1}\right]$$

$$= \frac{1}{(x+2)(x+3)\ldots(x+r)} \; \frac{(-r)}{(x+r+1)(x+1)}$$

$$= \frac{-r}{(x+1)(x+2)\ldots(x+r)(x+r+1)}$$

$$\Delta \; x^{(-r)} = (-r) \; x^{(-r+1)}$$

இப்பொழுது,

$$\Delta^2 \; x^{(-r)} = \Delta\left[(-r) \; x^{(-r+1)}\right]$$

$$= (-r)\,\Delta\left[\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+r+1)}\right]$$

$$= (-r)\left[\frac{1}{(x+2)(x+3)\ldots(x+r+2)}\right.$$

$$\left.- \frac{1}{(x+1)(x+2) \quad (x+r+1)}\right]$$

$$= (-r)\left[\frac{1}{(x+2)(x+3)\ldots(x+r+1)}\right]$$

$$\left\{\frac{1}{(x+r+2)} - \frac{1}{(x+1)}\right\}$$

$$= \frac{(-r)(-r-1)}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+r+1)(x+r+2)}$$

$$\Delta^2 x^{(-r)} = (-r)(-r-1)\, x^{(-r-2)}$$

மாதிரி 4: கீழ்க்காணும் சார்பையும் அதன் அடுத்தடுத்த வேறுபாட்டையும் (successive differences) காரணியப் பெருக்கக் குறியீடுமூலம் அமைக்க.

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 30x + 9$$

கொடுக்கப்பட்ட சார்பைக் காரணியப் பெருக்கக் குறியீடுமூலம், கீழ்க்கண்டவாறு அமைப்பதாகக் கொள்வோம்.

$$f(x) = x^{(4)} + A\,x^{(3)} + Bx^{(2)} + C\,x^{(1)} + D$$
$$= x(x-1)(x-2)(x-3) + A(x)(x-1)(x-2)$$
$$+ B\,x(x-1) + Cx + D$$
$$= x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 30x + 9$$

(என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$x = 0, 1, 2, 3,$ என்று மதிப்பீடு செய்தால்,

$D = 4$

$c + D = -8 \qquad \therefore c = -17$

$2A + 2C + 2D = -35, \qquad \therefore B = -5$

$6A + 6B + 3C + D = -108, \therefore A = -6$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சார்பு காரணீயப் பெருக்கக் குறியீடு மூலம்

$$f(x) = x^{(4)} - 6\,x^{(3)} - 5\,x^{(2)} - 17\,x^{(1)} + 9$$
$$\triangle f(x) = 4\,x^{(3)} - 18\,x^{(2)} - 10\,x^{(1)} - 17$$
$$\triangle^2 f(x) = 12\,x^{(2)} - 36\,x^{(1)} - 10$$
$$\triangle^3 f(x) = 24\,x^{(1)} - 36, \quad \triangle^4 f(n) = 24$$

மாதிரி 5 : முதல்நிலை வேறுபாடுகள் (first differences)

(i) e^x, (ii) $bx+c$, (iii) $\sin x$ (இடைவெளி வேறுபாடு π எனக்கொள்க). என்றால், சார்புகளைக் காண்க.

(i) தேவையான சார்பு $f(x) = Ke^x$ என்று கொள்க.

$$\triangle f(x) = Ke^{(x+1)} - ke^x$$
$$= ke^x[e-1] = e^x \text{ [கொடுக்கப்பட்டுள்ளது]}$$
$$ke^x[e-1] = e^x$$

இச் சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பின், நாம்

$$k = \frac{1}{e-1} \text{ என்று பெறுவோம்}$$

ஆதலின், $f(x) = \dfrac{1}{(e-1)}\,e^x$ என்பது தேவையான சார்பாகும்.

(ii) தேவையான சார்பு $f(x) = Ax^2 + Bx + c$ என்று கொள்க.

$$\triangle f(x) = A\left[(x+1)^2 - x^2\right] + B\left[(x+1) - x\right] + c - c$$

அல்லது, $\triangle f(x) = 2Ax + A + B \equiv bx + c$

x-ன் கெழுக்களையும், சார்பற்ற உறுப்புகளையும் (independent term) சமன்பாடு செய்தால்,

$$2A = b, \quad \therefore A = \frac{b}{2}$$

$$A + B = c, \quad \therefore B = c - \frac{b}{2}$$

இவ்வாறாக, $f(x) = \frac{1}{2}bx^2 + (c - \frac{1}{2}b)x + c$

(iii) தேவையான சார்பு $f(x) = k \sin x$ என்று கொள்க.

$$\triangle f(x) = k\left[\sin(x+\pi) - \sin x\right]$$

$$= k \cdot 2 \sin\frac{\pi}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2k \cdot (-\sin x) = \sin x \text{ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)}$$

$$\therefore k = -\frac{1}{2}$$

இவ்வாறாக, $f(x) = -\frac{1}{2}\sin x$

செயலி E (Operator E)

$y = f(x)$ என்பது x-ன் சார்பாகட்டும். $a, (a+h), (a+2h) \ldots\ldots$ என்பவை x-ன் அடுத்தடுத்த மதிப்புகளாக h என்ற இடைவெளி வேறுபாட்டோடு இருக்கட்டும்.

பின்பு, $\triangle f(a) = f(a+h) - f(a)$

நாம் இப்போது, செயலி Eஐ, $Ef(a) = f(a+h)$ என்று குறிக்கிறோம்.

அதாவது, $\triangle f(a) = Ef(a) - f(a)$

அல்லது, $Ef(a) = f(a) + \triangle f(a)$

இங்கு, $f(a)$ தன்னிச்சையானது என்பதால் (arbitrary), மேலுள்ள முடிவு, செயலிகள் $\triangle$-க்கும் E-க்கும் உள்ள தொடர்பு $E \equiv 1 + \triangle$ என்பதாக நிரூபிக்கப்படுகிறது.

செயலி Eஐ, n தடவைகள் செயற்படுத்தினுல், அதனை E^n எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

இவ்வாருக,

$$E^2 f(a) = E\left\{ E f(a) \right\} = Ef(a+h) = f(a+2h)$$

$$E^n f(a) = E^{n-1} \left\{ E f(a) \right\} = E^{n-1} f(a+h) = f(a+nh)$$

கவனிக்கவும்:

$$E^2 f(a) = f(a+2h) = f(a) + 2 \triangle f(a) + \triangle^2 f(a)$$

அதாவது, $E^2 = (1 + \triangle)^2$

x-என்பது நேர்முக முழு எண்ணுயின் $E^x = (1 + \triangle)^x$ என்று எழுதலாம்.

E-ம், $\triangle$-ம் செயற்குறிகளை தவிர, எண்களைப்போல் குறிகளைச் சமப்படுத்த இயலா.

$\triangle$, E ஆகிய செயலிகளின் மூன்று இயல் விதிகள் (3 laws of the operators E and $\triangle$)

(i) பங்கீட்டு விதி (Distributive law)

(ii) பரிமாற்று விதி (Commutative law)

(iii) அடுக்குகளின் விதி (Index law)

(i) பங்கீட்டு விதி :

$$\triangle [f(x) + g(x) + \ldots\ldots] = [f(x+h) + g(x+h) + \ldots\ldots] - [f(x) + g(x) + \ldots\ldots]$$

$$= [f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)] + [\ldots\ldots] + \ldots\ldots$$

$$= \triangle f(x) + \triangle g(x) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

இதுபோன்றே,

$$E[f(x) + g(x) + \ldots\ldots] = Ef(x) + Eg(x) + \ldots\ldots$$

பரிமாற்று விதி (Commutative law)

நிலையெண்ணைப் பொறுத்த மட்டும் $\triangle$-ம், E-ம் பரிமாற்று விதியைப்பற்றியுள்ளன.

$$\triangle [c\ f(x)] = cf(x+h) - cf(x)$$
$$= c[f(x+h) - f(x)] = c \triangle f(x)$$

இதுபோன்றே,

$E[cf(x)] = cf(x+h) = cE f(x)$, c என்பது நிலையெண்.

(iii) அடுக்குகளின் விதி (Index law)

$$\triangle^p \triangle^q f(x) = \triangle^p [\triangle^q f(x)]$$
$$= (\triangle\triangle\triangle \ldots p \text{ தடவைகள்})(\triangle\triangle\triangle \ldots q \text{ தடவைகள்}) f(x)$$
$$= [\triangle\triangle\triangle \ldots (p+q) \text{ தடவைகள்}] f(x)$$
$$= \triangle^{p+q} f(x)$$

இதுபோன்றே,

$$E^p E^q f(x) = E^{p+q} f(x)$$

விதிவிலக்கு (Exception) :

1. மாறிகளைப் பொறுத்தமட்டில் செயலிகள் $\triangle$-ம், E-ம் பரிமாற்று விதியைப் பின்பற்றுவதில்லை.

ஏனெனில், $\triangle [f(x)\, g(x)] \neq f(x) \triangle g(x)$
$$E[f(x)\, g(x)] \neq f(x)\, E\, g(x)$$

உதாரணமாக,

$$\triangle (x^2 - 5x + 6) = \triangle [(x-3)(x-2)] \neq (x-2) \triangle (x-3)$$

2. $E\triangle = \triangle E$

$$E \triangle f(x) = E \{f(x+h) - f(x)\} = f(x+2h) - f(x+h)$$
$$= \triangle f(x+h) = \triangle E f(x)$$

செயலி E^{-1} : E^{-1} என்ற செயலி $f(x)$-ன்மீது செயல்படும் பொழுது அதனை, $\frac{1}{E} f(x) = E^{-1} f(x) = f(x-h)$ என்று எழுதுகிறோம்.

$\triangle f(x-h) = f(x) - f(x-h)$ என்ற தொடர்பைக் கருதினால்

$$\triangle f(x-h) + f(x-h) = f(x)$$
$$\Rightarrow (1+\triangle) f(x-h) = f(x)$$

$$i.e., \quad E\, f(x-h) = f(x)$$
$$\Rightarrow \quad E^{-1} f(x) = f(x-h)$$

மேலும்,

$$\frac{1}{E^n} f(x) = E^{-n} f(x) = f(x-nh) \text{ ஆகும்.}$$

சாதாரணமாக,

$$\frac{1}{E^n} = \frac{1}{(1+\triangle)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \triangle^k$$

அதாவது,

$$f(x-nh) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \triangle^k f(x)$$

என்று எழுதுகிறோம்.

செயலி $\triangle^{-1}$: $\triangle f(x) = f(x+h) - f(x) = \phi(x)$ ... (1) என்க. இதனை $\triangle^{-1}$ ஆல் பெருக்கினால் $\triangle^{-1} \phi(x) = f(x)$ ஆகும்.

$w(x)$ என்பது பூச்சிய வேறுபாட்டைப் பெற்ற யாதாமொரு சார்பு எனில்,

$$\triangle\ [f(x) + w(x)] = \phi(x)$$
$$\therefore\ \triangle^{-1} \phi(x) = f(x) + w(x) \qquad \dots \qquad (2)$$

x மாறியானது தொடர்ச்சியற்றதெனில் $w(x)$ என்பது ஒரு நிலையெண் ஆகும்.

(2)-லிருந்து $\triangle^{-1}$ ம் $\triangle$-ம் பரிமாற்று விதியைப் பின்பற்றுவதில்லை என்பதை அறிகிறோம். எனவே, $\triangle\triangle^{-1} = 1$, $\triangle^{-1}\triangle \neq 1$ என்பதை உணருகிறோம். ஆனால், $\triangle$-ம், E-ம் பரிமாற்று விதியைப் பின்பற்றுகின்றன என்பதைக் கண்டோம்.

குறிப்பு :

(i) $$\frac{1}{\triangle} = -\frac{1}{1-E} = -(1+E+E^2+\dots\dots)$$

(ii) $$\triangle^{-1} f(x) = -\sum_{i=0}^{\infty} f(x+i) = -\sum_{i=x}^{\infty} f(i) \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி 6 : மதிப்பிடுக.

(i) $$\frac{\Delta^2 x^3}{E}$$

(ii) $$\frac{\Delta^2 x^3}{Ex^2}$$

(i) $$\frac{\Delta^2}{E} x^3 = \Delta^2 E^{-1} x^3 = \Delta^2 (x-h)^3$$

$$= \Delta [\Delta (x-h)^3]$$

$$= \Delta [x^3 - (x-h)^3]$$

$$= \Delta [3x^2h - 3xh^2 + h^3]$$

$$= 3h [(x+h)^2 - x^2] - 3h^2(x+h-x)$$

$$= 3h (2xh + h^2) - 3h^3 = 6xh^2.$$

(ii) $$\frac{\Delta^2 x^3}{Ex^3} = \frac{\Delta[\Delta x^3]}{(x+h)^3} = \frac{\Delta [(x+h)^3 - x^3]}{(x+h)^3}$$

$$= \frac{\Delta [3x^2h + 3xh^2 + h^3]}{(x+h)^3}$$

$$= \frac{3h [(x+h)^2 - x^2] + 3h^2 (x+h-x)}{(x+h)^3}$$

$$= \frac{6xh^2 + 6h^3}{(x+h)^3} = \frac{6h^2}{(x+h)^2}$$

இங்கு, h என்பது இடைவெளி வேறுபாடாகும்.

மாதிரி 7 :

குறியீடு பிரித்தல் முறைப்படி பின்வரும் முற்றொருமைகளை (identities நிறுவுக:

(i) $$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \binom{n+1}{1} u_0 + \binom{n+1}{2} \Delta u_0 + \ldots + \binom{n+1}{n+1} \Delta^n u_0$$

(ii) $$u_x = u_{x-1} + \Delta u_{x-2} + \Delta^2 u_{x-3} + \ldots\ldots + \Delta^{n-1} u_{x-n} + \Delta^n u_{x-n}$$

(iii) $u_x - u_{x+1} + u_{x+2} - u_{x+3} + \dots\dots\dots$

$$= \frac{1}{2}\left[u_{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}\,\Delta^2\, u_{x-\frac{3}{2}} + \frac{1\cdot 3}{2!}\left(\frac{1}{8}\right)^2 \Delta^4 u_{x-\frac{5}{2}} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}\left(\frac{1}{8}\right)^3 \Delta^6\, u_{x-\frac{7}{2}} + \dots\dots\dots \right]$$

(i) இடப்பக்கக்கோவை (L. H. S.) :

$$= u_0 + Eu_0 + E^2 u_0 + \dots\dots + E^n u_0$$

$$= [\,1+E+E^2+ \dots +E^n\,]\; u_0 = \frac{(1-E^{n+1})\; u_0}{1-E}$$

$$= \left(\frac{E^{n+1} - 1}{\Delta}\right) u_0$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left\{ (1+\Delta)^{n+1} - 1 \right\} u_0$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[\left\{ \binom{n+1}{1}\Delta + \binom{n+1}{2}\Delta^2 + \dots + \binom{n+1}{n+1}\Delta^{n+1} \right\} - \right] u_0$$

$$= \binom{n+1}{1} u_0 + \binom{n+1}{2}\Delta u_0 + \dots\dots + \binom{n+1}{n+1}\Delta^n u_0$$

= வலப்பக்கக் கோவை (R.H.S.)

(ii) வலப்பக்கத்திலுள்ள கடைசி உறுப்பை இடப்பக்கத்திற்கு இடமாற்றம் செய்தால்,

$$u_x - \Delta^n u_{x-n} = u_x - \Delta^n E^{-n} u_x = \left(1 - \frac{\Delta^n}{E^n}\right) u_x$$

$$= \left(\frac{E^n - \Delta^n}{E^n}\right) u_x = \frac{(E - \Delta)}{E^n}\,(E^{n-1} + E^{n-2}\Delta + E^{n-3}\Delta^2 + \dots\dots + \Delta^{n-1})\, u_x$$

$$= \frac{1}{E^n}\,(u_{x+n-1} + \Delta\, u_{x+n-2} + \Delta^2 u_{x+n-3} + \dots\dots + \Delta^{n-1} u_x)$$

$$= u_{x-1} + \Delta\, u_{x-2} + \Delta^2 u_{x-3} + \dots\dots + \Delta^{n-1} u_{x-n}.$$

(iii) வலப்பக்கக் கோவை,

$$= \frac{1}{2}\left[E^{-\frac{1}{2}}\ u_x - \frac{1}{8}\triangle^2 E^{-\frac{3}{2}}\ u_x + \frac{1\cdot 3}{2!}\left(\frac{1}{8}\right)^2 \triangle^4 E^{-\frac{5}{2}} u_x + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[E^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}\left(\frac{\triangle^2}{4E}\right)E^{-\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left. + \frac{1\cdot 3}{2!}\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{\triangle^2}{E}\right)^2 E^{-\frac{1}{2}} + \dots\right] u_x$$

$$= \frac{1}{2}E^{-\frac{1}{2}}\left[1 - \left(\frac{-\frac{1}{2}}{1!}\right)\left(\frac{\triangle^2}{4E}\right) + \left(\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}\right)\left(\frac{\triangle^2}{4E}\right)^2\right.$$

$$\left. + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}\left(\frac{\triangle^2}{4E}\right)^3 + \dots\right] u^x$$

$$= \frac{1}{2}E^{-\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{\triangle^2}{4E}\right]^{-\frac{1}{2}} u_x$$

$$= \frac{1}{2}E^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{4E + \triangle^2}{4E}\right]^{-\frac{1}{2}} u_x$$

$$= [4E + \triangle^2]^{-\frac{1}{2}}\ ux = [\,4E + (E-1)^2\,]^{-\frac{1}{2}} u_x$$

$$= (E^2 + 2E + 1)^{-\frac{1}{2}} u_x$$

$$= (1 + E)^{-1} u_x$$

$$= u_x - u_{x+1} + u_{x+2} - u_{x+3} + \dots\dots$$

= இடப்பக்கக் கோவை

செயலி D :

$D_x\, y_x$ என்பது y^x-ன் nஆம் நிலை வகைக்கெழு (derivative) என்றால், டெய்லரின் தொடர் (Taylor's Series)

$$y_{x+h} = y_x + hDy_x + \frac{h^2}{2!}D^2 y_x + \dots + \frac{h^n D^n}{n!} y_x + \dots$$

இங்கு $h = 1$ எனில்,

$$y_{x+1} = y_x + Dy_x + \frac{1}{2!} D^2 y_x + \dots + \frac{1}{n!} D^n y_x + \dots\dots$$

அல்லது,

$$Ey_x = \left(1 + \frac{D}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \dots\dots + \frac{D^n}{n!} + \dots\right) y_x$$

$$Ey_x = e^D y_x$$

$$\Rightarrow \quad E \equiv e^D$$

மேலும்,

$$E = 1 + \Delta = e^D$$

$$\Rightarrow D = \log E = \log(1+\Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} + \dots\dots$$

$$\Delta = e^{D-1} = E - 1$$

பயிற்சி 1

1. $u_1 = 1$, $u_2 = 8$, $u_3 = 27$, $u_4 = 64$, $u_5 = 12$, $u_6 = 216$ என்பவற்றைப் பயன்படுத்தி வேறுபாட்டு அட்டவணையை உருவாக்குக. பின்பு u_6 ன் மதிப்பைக் காண்க.

2. $u_0 = -3$, $u_1 = 6$, $u_2 = 8$, $u_3 = 12$ என்னும் மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் நிலையெண் எனில், u_8-ன் மதிப்பைக் காண்க.

3. இடைவெளி வேறுபாடு ஒன்று எனில், பின்னுள்ளவற்றை மதிப்பிடுக:

(a) $\Delta^3 (1-x)(1-2x)(1-3x)$

(b) $\Delta 6 [e^{ax \wedge b}]$

(c) $\Delta\left(ux \quad \frac{1}{x}\right)$

(d) $\Delta^n \left(\frac{1}{x}\right)$

(e) $\frac{\Delta^2}{E} x^3$

(f) $\Delta^n \sin(a+bx)$, இடைவெளி வேறுபாடு π எனில்.

(g) $\Delta^2 (ab^{cx})$

(h) $\Delta \cosh(a+bx)$

(4) $\Delta^n \left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n n! h^n (x-h)_{(n+1)}$

என்பதை நிறுவுக.

(5) nஆம்படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் $(n+1)$ஆம் நிலே வேறுபாடுகள் பூச்சியம் என்று நிருபிக்கவும். மேலும் $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$ என்ற சார்புக்கு $h = 0{\cdot}1$ என்ற இடைவெளியுடன்கூடிய $x \in [0, 1]$ என்ற x-ன் மதிப்புகளுக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணே அமைத்து இத்தேற்றத்தை நிருபிக்கவும்.

6. $f(x) = x^3 - 1{\cdot}7x^2 + 3{\cdot}2x + 2$ என்ற சார்புக்கு $h = 0{\cdot}01$ என்ற இடைவெளியுடன்கூடிய $x \in [0, 0.08]$ என்ற x-ன் மதிப்புகளுக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணே அமைத்து $f(0{\cdot}03)$-ன் மதிப்பைச் சரிபார்க்கவும்.

7. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 9$ என்ற முப்படிச் சார்புக்கு 4ஆம் நிலே வேறுபாடுகள் பூச்சியம் என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

8. இரண்டாம்நிலே பல்லுறுப்புக் கோவை (0,1), (1,3), (2,7), (3, 13) என்ற அச்சுத் தூரங்கள் (co-ordinates) வழியாகச் செல்லுமாஞல், அந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காணவும்.

9. கீழுள்ளவற்றைப் பயன்படுத்தி 4ஆம் நிலே பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்க.

$f(10) = 1, f(1) = 1, f(2) = 11, f(3) = 61, f(4) = 205, f(5) = 521.$

10. $(2x^3 - 3x^2 + 3x - 10)$ ஐயும், இதன் அடுத்தடுத்த வேறுபாடுகளேயும் காரணீயப் பெருக்கக் குறியீடுமூலம் அமைக்கவும்.

11. $f(x) = ax^n + bx^{n-1}$ எனில், $\Delta^n f(x)$ஐக் காண்க.

12. $f(x) = (1+\Delta)^x u_0$

(i) $f(0) = 1, f(1) = 11, f(2) = 21, f(3) = 28, f(4) = 29$ எனில், $f(9)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $f(0) = 25, f(1) = 25, f(2) = 22, f(3) = 18, f(4) = 15,$ $f(5) = 15$ எனில், $f(6)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

13. $f(x) = \cos x$ எனில், $\Delta^n f(x) = -4\sin^2 \frac{x}{2}$ என்பதை நிறுவுக.

14. m என்பது நேர்முக முழு எண் (positive integer) எனில் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\Delta^1 x^{(m)} = m\ (m-1)\ x^{(m-2)}$

(ii) $\Delta^2 x^{(-m)} - m\ (m+1)\ x^{-m-2}$

15. செயலிகள் Δ, E, D ஆகியவற்றின் தொடர்புகளையும் வரையறைகளையும் கூறி, Δ, E என்ற செயலிகள் மூன்று இயல் விதிகளைப் பின்பற்றுகின்றன என்பதையும் நிருபிக்கவும். விதி விலக்குகளைப்பற்றி விவாதிக்க.

16. "குறியீடு பிரித்தல்" (separation of symbols) முறைப்படி பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிறுவுக.

(i) $$u_1 x \Delta u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots = \frac{x}{1-x} u_1 \Delta \frac{x^2}{(1-x)^2} \Delta u_1$$

$$\Delta \frac{x^3}{(1-x)^3} \Delta^2 u_1 + \ldots\ldots$$

(ii) $$u_0 + \binom{x}{1} \Delta\ u_1 + \binom{x}{2} \Delta^2 u_2 + \binom{x}{3} \Delta^3 u_3 + \ldots\ldots$$

$$= u_x + \binom{x}{1} \Delta^2 u_{x-1} + \binom{x}{2} \Delta^4 u_{x-2} + \ldots.$$

(iii) $$u_0 - u_1 + u_2 - \ldots\ldots = \frac{1}{2} u_0 - \frac{1}{4} \Delta u_0 + \frac{1}{8} \Delta^2 u_0 - \frac{1}{16} \Delta^3 u_0 + \ldots\ldots\ldots$$

(iv) $$u_0 + \frac{u_1 x}{1!} + \frac{u_2 x^2}{2!} + \frac{u_3 x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= e^x \left\{ u_0 + x\ \Delta u_0 + \frac{x^2}{2!} \Delta^2 u_0 + \frac{x^3}{3!} \Delta^3 u_0 + \ldots\ldots\ldots \right\}$$

(v) $$\Delta^n u_x = u_{x+n} - \binom{n}{1} u_{x+n-1} + \binom{n}{2} u_{x+n-2} - \dots\dots\dots + (-1)^n u_x$$

(vi) $$\Delta^n u_{x-n} = u_x - \binom{n}{1} u_{x-1} + \binom{n}{2} u_{x-2} - \binom{n}{3} u_{x-3} + \dots\dots\dots$$

(vii) $$u_x + 2\Delta u_x + 3\Delta^2 u_x + \dots\dots$$

$$= \frac{1}{4}\left[u_x + u_{x+1} + \frac{3}{4} u_{x+2} + \frac{1}{2} u_{x+3} + \frac{5}{16} u_{x+4} + \dots\right]$$

(viii) $$\frac{1}{3}\left[u_0 + \frac{1}{3} u_1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 u_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 u_3 + \dots\dots\dots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[u_0 + \frac{1}{2}\Delta u_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Delta^2 u_0 + \dots\dots\dots\right]$$

17. பின்வருவனவற்றிற்கு அவற்றின் சார்புகளைக் காண்க.

(i) $\Delta u_x = u_x$, (ii) $\Delta u_x = 2u_x$, (iii) $\Delta u_x = x^2$

18. $\sum_{x=0}^{n-1} \Delta u_x = u_n - u_0$ என்பதை நிறுவுக.

19. n என்பது நேர்முக முழு எண் எனில்,

$$u_n = \left[\binom{n}{1} u_1 - \binom{n-1}{1} u_0\right] + \left[\binom{n+1}{2} \Delta^2 u_0 - \binom{n}{3} \Delta^2 u_{-1}\right] + \left[\binom{n+2}{5} \Delta^4 u_{-1} - \binom{n+1}{5} \Delta^4 u_{-2}\right] + \dots\dots\dots$$

2. சம இடைவெளிக்கு இடைச்செருகல்

(Interpolation for Equal Intervals)

சார்பற்ற மாறியின் பல தொடர்ந்த மதிப்புகளுக்குரிய சார்பின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், அம் மாறியின் ஓர் இடைப்பட்ட மதிப்பிற்குரிய சார்பின் மதிப்பைக் காணும் முறைக்கு இடைச்செருகல் என்று பெயர் (interpolation)

சார்பற்ற மாறியின் பல தொடர்ந்த மதிப்புகளுக்குரிய சார்பின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், அம் மாறியின் வீச்சுக்கு அப்பாற்பட்ட சார்பின் மதிப்பைக் காணும் முறைக்குப் புறச்செருகல் என்று பெயர் (extrapolation).

எடுத்துக்காட்டாக, கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் மாறி x-ன் மதிப்புகளுக்குரிய சார்பு $f(x) = \frac{1}{x}$-ன் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளன.

x	$f(x)$
2	·5000
3	·3333
4	·2500
5	·2000
6	·1667
7	·1429

மேற்கண்ட ஆறு மதிப்புகள் மட்டுமே சார்பின் அமைப்பைக் குறிக்கும் வகையில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது $x = 4·52$-க்குரிய சார்பான $f(x)$-ன் மதிப்பை நாம் காணலாம். இதற்கும் இடைச்செருகல் முறையைப் பயன்படுத்த வேண்டும். இதுபோலவே $x = 7·5$-க்குரிய $f(x)$-ன் மதிப்பை நாம் காணமுடியும். இதற்குப் புற இடைச்செருகல் முறையைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

நியூட்டன் - கிரிகோரியின் முற்போக்குச் சூத்திரம் (Newton - Gregory Formula for Foward Interpolation)

$y = f(x)$ என்பது, கொடுக்கப்பட்ட சார்பு என்றும் h என்னும் சம இடைவெளியுள்ள $a, a+h, a+2h, \ldots, (a+nh)$ என்ற சார் பற்ற மாறியின் மதிப்புகளுக்குரிய சார்பின் மதிப்புகள் $f(a)$, $f(a+h); f(a+2h) \ldots\ldots f(a+nh)$ என்றும் கொள்க.

$P_n(x)$ என்பது, x-ன் n ஆம்படி பல்லுறுப்புக்கோவை என்று கொள்க. பிறகு,

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)(x-a-h) + c_3(x-a)(x-a-h)(x-a-2h) + \ldots\ldots + c_n(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-\overline{n-1}\,h) \qquad (2{\cdot}1)$$

$P_n(a) = f(a)$, $p_n(a+h) = f(a+h) \ldots\ldots p_n(a+nh) = f(a+nh)$ என்பதற்கேற்ப $c_0, c_1 \ldots c_n$ என்ற கெழுக்களைக் காணலாம்.

சமன்பாடு (2·1)-ல் $x = a, a+h \ldots\ldots (a+nh)$ என்று மதிப்பிட்டால்,

$f(a) = c_0$ அல்லது $c_0 = f(a)$

$f(a+h) = c_0 + hc_1$ அல்லது $c_1 = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$c_1 = \frac{\Delta f(a)}{h}$$

$$f(a+2h) = c_0 + 2hc_1 + 2h.h.c_2$$

அல்லது,

$$c_2 = \left\{ f(a+2h) - 2[f(a+h) - f(a)] - f(a) \right\} / 2h^2$$

$$= \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{2h^2}$$

$$= \frac{\Delta^2 f(a)}{2h^2}$$

இதுபோல்,

$$c_3 = \frac{1}{3!h^3}\Delta^3 f(a) \ldots\ldots c_n = \frac{1}{n!h^n}\Delta^n f(a)$$

(2·1)-ல், $c_0, c_1 \ldots\ldots c_n$ மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டால்,

$$P_n(x) = f(a) + \frac{\Delta f(a)}{h}(x-a) + \frac{\Delta^2 f(a)}{2!\,h^2}(x-a)(x-a-h)$$

$$+ \frac{\Delta^3 f(a)}{3!\,h^3}(x-a)(x-a-h)(x-a-2h) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\Delta^n f(a)}{n!\,h^n}(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-nh)$$

இது நியூட்டன் கிரிகோரியின் முற்போக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரமாகும். இப்பொழுது $\frac{x-a}{h} = u$ என்றால், அல்லது, $x = a+hu$ எனில், மேலுள்ள சூத்திரம் எளிதாகப் பின்வருமாறு அமைகிறது.

$$P_n(x) = P_n(a+hu) = f(a) + u\,\Delta f(a) + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(a)$$

$$+ \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 f(a) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-n+1)}{n!}\Delta^n f(a)$$

அல்லது,

$$P_n(x) = f(a) + u^{(1)}\Delta f(a) + \frac{1}{2!}u^{(2)}\Delta^2 f(a) + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}u^{(n)}\Delta^n f(a) \qquad \ldots\ldots \quad (2\cdot2)$$

இங்கு, $u^{(n)} = u(u-1)(u-2)\ldots\ldots(u-n+1)$

குறிப்பு : இச் சூத்திரத்தில் $a=0$, $h=1$ என்று பிரதியிட்டால் கீழ்வரும் ஓர் எளிய அமைப்பைப் பெறுகிறோம்.

$$P_n(x) = f(0) + \binom{u}{1}\Delta f(0) + \binom{u}{2}\Delta^2 f(0)$$

இச் சூத்திரத்தில் சார்பலனின் ஆரம்ப மதிப்புகளுக்கு இடையேயுள்ள மதிப்புகளுக்கு இடைச்செருகல் செய்ய முடியும்.

நியூட்டன் – கிரிகோரியின் பிற்போக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரம்

$P_n(x)$ என்பது, n ஆம்படி பல்லுறுப்புக் கோவை என்று பின்வருமாறு கொள்க.

$$P_n(x) = B_0 + B_1(x-a-nh) + B_2(x-a-nh)(x-a-nh+h)$$
$$+ B_3(x-a-nh)(x-a-nh+h)(x-a-nh+2h) + \ldots\ldots$$
$$+ B_n(x-a-nh)(x-a-nh+h)\ldots\ldots(x-a) \qquad \ldots\ldots(2\cdot3)$$

$B_0, B_1, B_2, \ldots B_n$ என்ற கெழுக்களை $P_n(a+nh) = f(a+nh)$ …… $P_n(a) = f(a)$ என்றமைவதற்கேற்பக் காண்கிறோம்.

$x = a+nh,\ a+nh-h, \ldots$ என்று (2·3) ல் பிரதியிட்டு, $P_n(a+nh) = f(a+nh)$ … என்று கொண்டால் $f(a+nh) = B_0$ அல்லது $B_0 = f(a+nh)$.

$$f(a+nh-h) = B_0 + B_1(-h)$$

$$\text{அல்லது } B_1 = \frac{f(a+nh) - f(a+nh-h)}{h}$$

$$B_1 = \frac{1}{1!\,h}\Delta_1 f(a+nh)$$

$$f(a+nh-2h) = A_0 + A_1(-2h) + A_2(-2h)(-h)$$

அல்லது,

$$B_2 = \frac{f(a+nh) - 2f(a+\overline{n-1}h) + f(a+\overline{n-2}h)}{2h^2}$$

$$= \frac{1}{2!\,h^2}\Delta_2 f(a+nh)$$

இதுபோல்,

$$B_3 = \frac{1}{3!\,h^3}\Delta_3 f(a+nh)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$B_n = \frac{1}{n!\,h^n}\Delta_n f(a+nh)$$

$B_1, B_2, \ldots\ldots B_n$ மதிப்புகளை (2·3)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$P_n(x) = f(a+nh) + \frac{\Delta_1 f(a+nh)}{1!\,h}(x-\overline{a+nh})$$

$$+\frac{\Delta_2 f(a+nh)}{2!\,h^2}(x-\overline{a+nh})(x-\overline{a+nh-h}) + \dots\dots\dots$$

$$+\frac{\Delta_n f(a+nh)}{n!\,h^n}(x-\overline{a+nh})(x-\overline{a+nh-h})\dots(x-a)$$

இது 'நியூட்டன் கிரிகோரியின்' பிற்போக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரமாகும்.

$u = \dfrac{x-(a+nh)}{h}$ அல்லது $x = a+nh+hu$ என்று மேலுள்ள சூத்திரத்தில் பிரதியிட்டால்,

$$P_n(x) = P_n(a+nh+hu) = f(a+nh) + \frac{u\Delta_1}{1!} f(a+nh)$$

$$+\frac{u(u+1)}{2!}\Delta_2 f(a+nh) + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\Delta_3 f(a+nh)$$

$$+ \dots\dots + \frac{u(u+1)\dots(u+n-1)}{n!}\Delta_n f(a+nh)$$

இது நியூட்டன்-கிரிகோரியின்' எளிதான பிற்போக்கு இடைச் செருகல் சூத்திரமாகும்.

மாதிரி 1: இடைவெளி $h = 0\cdot5$ உள்ள $0\cdot5$ முதல் $2\cdot5$ வரையான x-ன் மதிப்புகளுக்குரிய சார்பு $f(x) = e^{-x}$-ன் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றிலிருந்து $x = 0\cdot55$-க்கான e^{-x}-ன் மதிப்பைக் காண்க.

வேறுபாட்டு அட்டவணை

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0·5	0·6065				
		−0·2386			
1·0	0·3679		0·0938		
		−0·1448		−0·0368	
1·5	0·2231		0·0570		0·0144
		−0·0878		−0·0224	
2·0	0·1353		0·0346		
		0·0532			
2·5	0·0821				

இங்கு நாம் காணவேண்டிய $f(0\cdot55)$-ன் மதிப்பு $f(0\cdot5)$, $f(1\cdot0)$ ஆகிய முதலிரு மதிப்புகளுக்கு இடைப்பட்டிருப்பதால் 0·5ஐ ஆரம்பமாகக் கொள்க.

$h = 0\cdot1$ என்று அறிவோம்.

$$f(a) = f(0\cdot5) = 0\cdot6065$$
$$\Delta f(a) = \Delta f(0\cdot5) = -0\cdot2386$$
$$\Delta^2 f(a) = \Delta^2 f(0\cdot5) = +0\cdot0938$$
$$\Delta^3 f(a) = \Delta^3 f(0\cdot5) = -0\cdot0368$$
$$\Delta^4 f(a) = \Delta^4 f(0\cdot5) = 0\cdot0144$$

$\dfrac{x-a}{h} = u$ எனில், $u = \dfrac{0\cdot55 - 0\cdot5}{0\cdot5} = 0\cdot1$ என்ற மதிப்புகளைக் கொண்டு நியூட்டன் - கிரிகோரியின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தில் பிரதியிட,

$$f(a+hu) = f(a) + \binom{u}{1}\Delta f(a) + \binom{u}{2}\Delta^2 f(a)$$
$$+ \binom{u}{3}\Delta^3 f(a) + \cdots$$

$$f(0\cdot55) = (0\cdot6065) + (0\cdot5)(-0\cdot2386)$$
$$+ \frac{(0\cdot5)(-0\cdot5)}{2}(0\cdot0938)$$
$$+ \frac{(0\cdot5)(-0\cdot5)(-1\cdot5)}{6}(-0\cdot0368)$$
$$+ \frac{(0\cdot5)(-0\cdot5)(-1\cdot5)(-2\cdot5)}{24}(0\cdot0144)$$
$$= 0\cdot4226$$

இதுதான் $x = 0\cdot55$-க்கான e^{-x}-ன் மதிப்பாகும்.

மாதிரி 2: கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் $f(x)$ என்ற சார்பு கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. ஒரு பொருத்தமான இடைச்செருகல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, $f(0\cdot2)$ஐ மதிப்பிடுக.

x:	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$:	76	8[illegible]	94	103	112	120	129

நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f(0\cdot2)$-ன் மதிப்பைக் காணவேண்டும். இதற்கு வேறுபாட்டு அட்டவணையைக் கீழ்க்காணுமாறு அமைக்கவேண்டும்

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$	$\Delta^6 f(x)$
0	76						
		9					
1	85		0				
		9		0			
2	94		0		0		
		9		0		−1	
3	103		0		−1		5
		9		−1		4	
4	112		−1		3		
		8		2			
5	120		1				
		9					
6	129						

'நியூட்டன் கிரிகோரியின்' முற்போக்குச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1} \Delta f(0) + \binom{x}{2} \Delta^2 f(0) + \binom{x}{3} \Delta^3 f(0) + \ldots\ldots\ldots$$

$f(0) = 76,\ \Delta f(0) = 9,\ \Delta^2 f(0) = \Delta^3 f(0) = \Delta^4 f(0) = 0$

$\Delta^5 f(0) = -1,\ \Delta^6 f(0) = 5$ என்ற மதிப்புகளைப் பிரதியிட

$$f(0\cdot2) = 76 + (0\cdot2)\,9 + 0 + 0 + 0 + \binom{0\cdot2}{5}(-1) + \binom{0\cdot2}{6} 5$$

$$= 76 + 1\cdot8 - 0\cdot025536 - 0\cdot102144$$

$$= 77\cdot67232$$

மாதிரி 3: நியூட்டனின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $x = 1\cdot375$-க்கான $\log x$-ன் மதிப்பைக் கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து பெறுக.

x :	1·35	1·36	1·37	1·38
$\log x$:	0·1303	0·1335	0·1367	0·1399

முதலில் வேறுபாட்டு அட்டவணையை அமைப்போம்.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
1·35	0·1303		
		0·0032	
1·36	0·1335		0
		0·0032	
1·37	0·1367		0
		0·0032	
1·38	0·1399		

'நியூட்டன் கிரிகோரியின்' பிற்போக்கு இடைச் செருகல் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$P_n(x) = P_n(a+nh+hu) = f(a+nh) + u\,\Delta_1 f(a+nh) + \frac{u(u+1)}{2\,!}\Delta_2 f(a+nh) + \frac{u(u+1)(u+2)}{3\,!}\Delta_3 f(a+nh) + \ldots\ldots\ldots$$

இதில், $u = \dfrac{x-(a+nh)}{h}$

$x = 1·375$ என்பது, 1·37-க்கும், 1·38-க்கும் இடையேயுள்ளமையால், 'நியூட்டன் கிரிகோரியின்' பிற்போக்கு இடைச் செருகல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

இதில், $f(a+nh) = 1·38$, $h = 0·01$.

$$\therefore\ u = \frac{x-1·38}{0·01} = \frac{1·375-1·38}{0·01} = \frac{0·005}{0.01} = -0·5.$$

$$\therefore\ P_n(1·375) = 1·38 + (-0·5)(0·0032) + \frac{(-0·5)(0·5)}{2!}\,0$$

$$1·38 - 0·00160 = 1·37840$$

சம இடைவெளி உறுப்புகளில் ஒன்றுக்கும் அதற்கும் மேற்பட்ட உறுப்புகள் விட்டுப்போகும் நிலை (Equi-distant terms with one or more missing terms)

y-ன் ஒன்றுக்கும், அதற்கும் மேற்பட்ட மதிப்புகள் x-க்கு பொருத்தமான சம இடைவெளி மதிப்புகளுக்கு $y = f(x)$ என்ற சார்பில் விட்டுப் போயிருந்தால் (missing), அவற்றைக் காண பின்வரும் முறைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

$$\Delta^n f(a) = (E-1)^n f(a)$$

$$= \left[E^n - \binom{n}{1} E^{n-1} + \binom{n}{2} E^{n-2} + \ldots + (-1)^n\right] f(a)$$

$$= E^n f(a) - \binom{n}{1} E^{n-1} f(a) + \binom{n}{2} E^{n-2} f(a) + \ldots\ldots (-1)^n f(a)$$

$$= f(a+nh) - \binom{n}{1} f(a + \overline{n-1}\,h) + \binom{n}{2} f(a + \overline{n-2}\,h) + \ldots\ldots + (-1)^n f(a)$$

$f(x)$-ஐச் சார்பின் மாறி x-ன் $(n-1)$ ஆம்படி பல்லுறுப்புக் கோவை என்று கொண்டால், எல்லா x-ன் மதிப்புகளுக்கும்,

$$\Delta^n f(x) = 0, \therefore f(a+nh) - \binom{n}{1} f(a+\overline{n-1}\,h) + \ldots + (-1)^n f(a) = 0$$

$f(x)$-ன் n மதிப்புகளும் தெரிந்தால்தான், இந்தச் சமன்பாட்டைத் தீர்வு செய்வதால் $y = f(x)$-ன் விட்டுப்போன மதிப்புகள் (missing values) தெரியும்.

வழிமுறை இரண்டு : $y = f(x)$ என்ற சார்பைக் கருதுக. சார்பற்ற மாறி x-ன் $(n+1)$ சம இடைவெளி மதிப்புகளுக்குப் பொருத்தமான y-ன் $(n+1)$ மதிப்புகளில், n மதிப்புகள் மட்டுமே தெரிந்திருந்து, மீதியுள்ள y-ன் மதிப்புகளை, x-ன் ஏதாவது தெரிந்த மதிப்புகளுக்குக் காண முடியும்.

மாறி x க்குப் பொருத்தமான y-ன் விட்டுப்போன மதிப்பை u என்று குறித்து, வேறுபாட்டு அட்டவணையை அமைக்கவேண்டும் y-ன், n மதிப்புகள் மட்டுமே தெரியுமாதலால், $y = f(x)$ஐ x-ன்

$(n-1)$ ஆம்படி பல்லுறுப்புக்கோவை என்று கருதுகிறோம். nஆம் வேறுபாட்டைப் பூச்சியத்திற்குச் சமன்பாடிட்டால், u-ன் மதிப்பை நாம் காணமுடியும்.

மாதிரி : ஒரு தொழிற்சாலையின் எஃகின் உற்பத்தி மெட்ரிக் டன்களில் வருடம் 1930 முதல் 1970 வரை (10 வருட இடைவெளியில்) பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 1964-ஆம் வருடத்திற்கான எஃகின் உற்பத்தி என்ன என்பதைக் காண்க

வருடம் (x)	1930	1940	1950	1960	1970
எஃகின் உற்பத்தி (மெட்ரிக் டன்கள்) (y)	36	56	71	83	91

$u = \dfrac{x-1930}{10}$ என்ற புதிய மாறியை அமைத்தால் 0, 1, 2, 3, 4 என்ற மதிப்புகளை u பெறுகின்றது.

வேறுபாட்டு அட்டவணை பின்வருமாறு ;

u	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	36				
		20			
1	56		−5		
		15		2	
2	71		−3		−3
		12		−1	
3	83		−4		
		8			
4	91				

5 மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளமையால் நாம் 4ஆம் வேறுபாட்டை நிலையெண்ணாகக் கொள்கிறோம்.

இப்பொழுது, $x = 1964$

அல்லது $u = \dfrac{1964 - 1930}{10} = 3 \cdot 4$-க்கான y-ன் மதிப்பைக் காண வேண்டும்.

இப்படியாக,

$$Y_{34} = E^{3.4}\, y_0 = (1+\Delta)^{3.4}\, y_0$$

$$= y_0 + 3.4\,\Delta y_0 + \frac{(3.4)(2.4)}{1\times 2}\Delta^2 y_0 + \frac{(3.4)(2.4)(1.4)}{1\times 2\times 3}\Delta^3 y_0$$

$$+ \frac{(3.4)(2.4)(1.4)(0.4)}{1\times 2\times 3\times 4}\Delta^4 y_0$$

$$= 36 + 68 - 20.4 + 3.808 - 0.5712$$

$$= 86.8368 \text{ மெட்ரிக் டன்கள்.}$$

எனவே, 1974ஆம் வருடத்தின் எஃகின் உற்பத்தி 86.8368 மெட்ரிக் டன்களாகும்.

மாதிரி : மகை 10 = 1, மகை 11 = 1.0414, மகை 13 = 1.1139 மகை 14 = 1.1461 என்றால் மகை 12ன் மதிப்பைக் காண்க.

செய்முறை 1: மேலுள்ள விவரத்தைப் பின்வருமாறு அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

x :	10	11	12	13	14
$f(x)$:	1	1.0414	...	1.1139	1.1461

மகை x

மேலுள்ள அட்டவணையில் $f(x)$-ன் 4 மதிப்புகள் மட்டுமே கொடுக்கப்பட்டுள்ளமையால், மூன்றாம்நிலை வேறுபாடு நிலையெண் என்றும், 4ஆம் நிலை வேறுபாடு பூச்சியம் என்றும் கொள்கிறோம். அதாவது, x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$\Delta^4 f(x) = 0,$$

$$\therefore \Delta^4 f(10) = 0.$$

$$\Rightarrow (E-1)^4 f(10) = 0 \Rightarrow (E^4 - 4E^3 + 6E^2 - 4E + 1) f(10) = 0$$

$$\Rightarrow f(14) - 4f(13) + 6f(12) - 4f(11) + f(10) = 0$$

$$\Rightarrow 1.1461 - 4(1.1139) + 6f(12) - 4(1.0414) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 6f(12) = 6.4751$$

$$\therefore f(12) = \text{மகை } 12 = 1.0792$$

செய்முறை 2: விட்டுப் போன மதிப்பு u என்று கொண்டு வேறுபாட்டு அட்டவணையைப் பின்வருமாறு அமைப்போம்.

x	$y =$ மகை x	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
10	1·0000				
		0·0414			
11	1·0414		$u - 1·0828$		
		$u - 1·0414$		$3·238[illegible] - 3u$	
12	u		$2·1553 - 2u$		$6u - 6·4751$
		$1·1139 - u$		$3u - 3·2370$	
13	1·1139		$u - 1·0817$		
		0·0322			
14	1·1461				

4ஆம்நிலை வேறுபாட்டைப் பூச்சியத்திற்குச் சான்பாடிட்டால்,

$$6u - 6·4751 = 0 \quad \text{அல்லது} \quad u = \frac{6·4751}{6} = 1·07916.$$

$\therefore$ மகை $12 = 1·0792$

மாதிரி 5 : பின்வரும் அட்டவணையில் விட்டுப்போன y_x-ன் மதிப்புகளை மதிப்பிடுக.

x :	1·0	1.1	1.2	1·3	1·4	1·5	1·6
y_x :	0·235	—	0·211	0·200	—	0·182	0·174

y-ன் 5 மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளமையால், 4ஆம்நிலை வேறுபாடுகளை நிலையெண் என்றும், 5ஆம்நிலை வேறுபாட்டைப் பூச்சியம் என்றும் கொள்கிறோம்.

எனவே, $\Delta^5 y_x = 0$, x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்,

அல்லது $(E - 1)^5 y_x = 0$

$$\therefore (E-1)^5 y_{1·0} = 0 \qquad \ldots\ldots \qquad (1)$$

$$(E-1)^5 y_{1·1} = 0 \qquad \ldots\ldots \qquad (2)$$

இங்கு இடைவெளித் தூரம் 0·1 என்பதை அறிவோம். சமன்பாடுகள் (1)-ம், (2)-ம் பின்வருமாறு அமைகின்றன.

$$y_{1·5} - 5y_{1·4} + 10y_{1·3} - 10y_{1·2} + 5y_{1·1} - y_{1·0} = 0$$

$$y_{1·6} - 5y_{1·5} + 10y_{1·4} - 10y_{1·3} + 5y_{1·2} + p_{1·1} = 0$$

$y_{1·0}, y_{1·2}, y_{1·3}, y_{1·5}, y_{1·6}$ களின் மதிப்புகளை மேலுள்ள சமன்பாடுகளில் பிரதியிட்டால்,

$$0.182 - 5y_{1.4} + 10(0.200) - 10(0.211) + 5y_{1.1} - 0.235 = 0$$

$$0.174 - 5(0.182) + 10y_{1.4} - 10(0.200) + 5(0.211) - y_{1.1} = 0$$

தீர்வு கண்டால் $y_{1.1} = 0.223,\ y_{1.4} = 0.1904$

மாதிரி 6: இரண்டாம் நிலை வேறுபாடுகளை நிலையெண் எனக் கொண்டு பின்வரும் விவரத்திலிருந்து $f(4)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$f(0) = 1,\ f(1) + f(2) = 10,\ f(3) + f(4) + f(5) = 65$$

சார்பற்ற மாறியான x-ன் சார்பு $f(x)$ என்றும், $f(1) = p$, $f(2) = q$, $f(3) = r$, $f(4) = s$, $f(5) = t$ என்றும் கொள்வோம்.

இம் மதிப்புகளுக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை பின்வருமாறு:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
0	1		
		$p-1$	
1	p		c
		$q-p$	
2	q		c
		$r-q$	
3	r		c
		$s-r$	
4	s		c
		$t-s$	
5	t		

இரண்டாம்நிலை வேறுபாடு நிலையெண் என்பதால், நாம் 'c' எனக் கொள்வோம். மேலுள்ள, அட்டவணையிலிருந்து உண்மையில் $\Delta^2 f(x)$ என்பது பின்வருமாறு:

$$\Delta^2 f(x)$$

$$(q-p) - (p-1)$$

$$(r-q) - (q-p)$$

$$(s-r) - (r-q)$$

$$(t-s) - (s-r)$$

ஆனால், இவற்றுள் ஒவ்வொன்றும் c என்ற நிலையெண் ஆனதால் நாம் பின்வரும் சமன்பாடுகளைப் பெறுகிறோம்.

$(q-p) - (p-1) = c$ அல்லது $q-p = p-1+c$

$(r-q) - (q-p) = c$ அல்லது $r-q = 2c + (p-1)$

$(s-r) - (r-q) = c$ அல்லது $s-r = (p-1) + 3c$

$(t-s) - (s-r) = c$ அல்லது $t-s = (p-1) + 4c$

ஆனால், $p + q = 10$, $r + s + t = 65$,

(i) ஐ $(q+p) - 3p+1 = c$ என்று எழுதினால்,

$$10 - 3p + 1 = c \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\therefore q - p = c$$

$$r - 2c + 1 - p = q$$

(ii) ஐ $q = r - 2c + 1 - p$ என்று எழுதினால்

$q = 10 - p$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$10-p = r - 2c+1-p$$

அல்லது, $r = 2c-9 \qquad \ldots\ldots \quad (2)$

(iii)-ல் r-ன் மதிப்புக்கு (2)-லிருந்து பிரதியிட

$$s - (2c+9) = p-1+3c$$

$$s = 5c+8+p \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

(iv)-ல் s-ன் மதிப்புக்குப் பிரதியிட,

$$t = (5c+8+p)+p-1+4c$$

$$= 9c+2p+7 \qquad \ldots\ldots \quad (4)$$

(2), (3), (4) சமன்பாடுகளைக் கூட்ட,

$$r+s+t = 24+16c+3p$$

ஆனால், $r+s+t = 65$

எனவே, $65 = 24+16c+3p$

அல்லது, $16c+3p = 41 \qquad \ldots\ldots \quad (5)$

இப்பொழுது சமன்பாடு (1)-க்கும், (5)-க்கும் தீர்வு கண்டால்,

$c = 2$, $p = 3$ என்று காண்கிறோம்.

எனவே, $f(4) = s$

சமன்பாடு (3)-லிருந்து $s = 5c+8+p$

$$= 5(2)+8+3 = 21$$

இவ்வாறாக, $f(4) = 24$ என்று அறிகிறோம்.

பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகள் (Differences of zero)

m, n என்ற இரு நேர்முக எண்களுக்கு

$$\Delta^n x^m = (E-1)^n x^m = \left[E^n - \binom{n}{1} E^{n-1} + \binom{n}{2} E^{n-2} - \dots (-1)^n\right] x^m$$

$$= (x+n)^m - \binom{n}{1}(x+n-1)^m + \binom{n}{2}(x+n-2)^m \dots\dots\dots$$

$$+ (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(x+1)^m + (-1)^n x^m$$

இதில் $x = 0$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$\Delta^n 0^m = n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \dots\dots$$

$$+ (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(1)^m + (-1)^n 0^m$$

$\Delta^n 0^m$ என்பன பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகளாகும்.

சிறப்பு வகைகள் (Particular cases): $m = 1$ என்றால்,

$$\Delta^n 0 = n - \binom{n}{1}(n-1) + \binom{n}{2}(n-2) + \binom{n}{3}(n-3) + \dots$$

$$+ (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(1) + (-1)^n = 0$$

$$= \binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + (-1)^n\binom{n}{n-1}$$

$$= \left[n - \frac{2n(n-1)}{2} + \frac{3(n)(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1} - \dots + (-1)^n\right]$$

$$= n\left[1 - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots\ldots + (-1)^n\right]$$

$$\Delta^n 0 = (1-1)^{n-1} = 0$$

$m = 2$ என்றால்,

$$\Delta^n 0^2 = n^2 - \binom{n}{1}(n-1)^2 + \binom{n}{2}(n-2)^2 - \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(-1) + (-1)^n 0^2$$

$n = 1, 2, 3$; $m = 2$ எனில்,

$$\Delta 0^2 = 1^2 - \binom{1}{1}0^2 = 0$$

$$\Delta^2 0^2 = 2^2 - \binom{2}{1}1^2 + \binom{2}{2}0^2 = 4 - 2 = 2$$

$$\Delta^3 0^2 = 3^2 - \binom{3}{1}2^2 + \binom{3}{2}1^2 - \binom{3}{3}0^2$$

$$= 9 - 12 + 3 = 0$$

$n = 3$, $m = 4$ எனில்,

$$\Delta^3 0^4 = 3^4 - \binom{3}{1}2^4 + \binom{3}{2}1^4 - \binom{3}{3}0^4$$

$$\Delta^3 0^4 = 81 - 48 + 3 = 36$$

மாதிரி 7: $(1+x)^n = c_0 + c_1 x + \ldots\ldots + c_n x^n$.

n என்பது நேர்முக முழு எண் என்றால்,

$(x-1)^2 c_1 + (x-3)^2 c_3 + (x-5)^2 c_5 + \ldots\ldots\ldots$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$(x-1)^2 c_1 + (x-3)^2 c_3 + (x-5)^2 c_5 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= [E^{-1} c_1 + E^{-3} c_3 + E^{-5} c_5 + \ldots\ldots\ldots] x^2$$

$$= \tfrac{1}{2}[(1+E^{-1})^n - (1-E^{-1})^n] x^2$$

$$= \tfrac{1}{2} [(\Delta+2)^n - \Delta^n E^{-n} (x)^2$$

$$= \tfrac{1}{2} [(\Delta+2)^n - \Delta^n] (x-n)^2$$

இப்போது $x = n$ **எனில்,**

$$(x-1)^2 c_1 + (x-3)^2 c_3 + (x-5)^2 c_5 = \tfrac{1}{2} [(\Delta+2)^n - \Delta^n] 0^2$$

$$= \tfrac{1}{2} [2^n 0^2 + n\, 2^{n-1} \Delta 0^2 + \tfrac{1}{2} n (n-1) 2^{n-2} \Delta^2 0^2 + \ldots\ldots]$$

$$= \tfrac{1}{2} [n \cdot 2^{n-1}\, 1 + \tfrac{1}{2} n (n-1) 2^{n-2} (2!)]$$

$$= \tfrac{1}{2} [n 2^{n-1} + n (n-1) 2^{n-2}]$$

$$= n \cdot 2^{n-2} + n(n-1) 2^{n-3}$$

$$= 2^{n-3} n (2+n-1) = n(n+1) 2^{n-3}$$

பயிற்சி 2

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து விட்டுப் போன உறுப்புகளைக் காண்க.

(a) x :	0	1	2	3	4
$f(x)$;	580	556	520	—	385
(b) x :	1	2	3	4	5
$f(x)$:	38[illegible]	—	530	—	8[illegible]0

2. $y_0 = 3 \cdot 1234$, $y_6 = 3 \cdot 7234$, $y_{12} = 4 \cdot$[illegible], $y_{18} = 6 \cdot 1330$ எனில், y_0-லிருந்து y_6 வரையுள்ள தொடரைப் பூர்த்தி செய்க.

3. கீழ்வரும் அட்டவணையிலிருந்து 1950ஆம் வருடத்திற்குரிய மக்கள் தொகையை மதிப்பிடுக.

வருடம் ;	1930	1940	1950	1960	1970
மக்கள் தொகை (ஆயிரத்தில்)	13[illegible]	139	—	239	662

4. வேறுபாட்டு அட்டவணையை அமைத்து, 0, 0, 2, 6, 12, 20 என்ற தொடரின் 7ஆம் உறுப்பையும் பொது உறுப்பையும் காண்க.

5. பின்வரும் அட்டவணையிலிருந்து எத்தனை நபர்கள் 60-லிருந்து 70 ரூபாய்வரை ஊதியம் சம்பாதிக்கிறார்கள் என்பதைக் காண்க.

ஊதியம் – (ரூபாயில்):	<40	40-60	60-80	80-100	100–120
நபர்கள் – (ஆயிரத்தில்):	250	120	100	70	50

6. $y = \cos hx$ என்ற சார்புக்குரிய மதிப்புகள் கீழுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

x	y
0·1	1·0050
0·3	1·0453
0·5	1·1276
0·7	1·2552
0·9	1·4331
1·1	1·6[illegible]85

நியூட்டன் கிரிகோரியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $x = 0{\cdot}4$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

7. நியூட்டன் – கிரிகோரியின் முற்போக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து $f($[illegible]$\cdot5)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	0	1	2	3	4
$f(x)$:	458·3	469·6	480·9	492·3	5[illegible]3·6

8. $\sin(x)$ என்ற சார்புக்கு உரிய மதிப்புகள் கீழுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $\sin(0{\cdot}3)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6
$\sin x$:	0·0[illegible]98	0·198[illegible]	—	0·38[illegible]5	0·4759	0·5591

9. ஆயுள் அட்டவணையிலிருந்து (life table) lx என்பது x வயதில் வாழும் நபர்களின் எண்ணிக்கை ஆகும். கீழுள்ள அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி $x = 35, 42, 47$ க்கான நபர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

x :	20	30	40	50
lx :	512	4[illegible]9	3[illegible]6	243

10. மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\triangle^2 0^5$ (ii) $\triangle^3 0^6$ (iii) $\triangle^4 0^5$ (iv) $\triangle^5 0^5$ (v) $\triangle 0$;

11. $\triangle^n 0^m = n^n - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^n - \ldots\ldots$

என்பதை நிறுவி.

$n! = n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n \ldots\ldots$ என்று முடிவு காண்க (deduce).

12. $\triangle^n 0^m = n(\triangle^{n-1} 0^{m-1} + \triangle^n 0^{m-1})$

என்பதைக் காட்டுக.

13. $m > 1$ எனில் $\triangle 0^m - \frac{1}{2}\triangle^2 0^m + \frac{1}{3}\triangle^3 0^m - \ldots\ldots = 0$, என்பதைக் காட்டுக.

14. $\triangle^n 0^{n+1} = \frac{1}{2} n(n+1) \triangle^n 0^n = \frac{n}{2}(n+1)!$ என்பதை நிருபிக்க.

15. நியூட்டனின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து $x = 3 \cdot 5$-ன் மதிப்பினைக் காண்க.

x :	0	1	2	3	4
y :	1	3	9	27	81

3. சார்புமாறியின் அசம இடைவெளிக்கு இடைச்செருகல்

(Interpolation with Unequal Intervals of the Argument)

$x_0, x_1, \ldots x_n$ என்ற மாறிகளுக்கு ஏற்ற சார்பலன்கள் $f(x_0), f(x_1), \ldots f(x_n)$ அசம இடைவெளிகளான, $(x_1 - x_0)$, $(x_2 - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})$-களோடு அமைந்திருக்கட்டும் (சமமான இடைவெளியோடு இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை).

$x_0, x_1 \cdots x_n$ என்ற மாறிகளுக்கு ஏற்ற முதல்நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகள் பின்வருமாறு :

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

என்று மேன்மேலும் கொள்ளலாம்.

x_0, x_1, x_2 ஆகிய மாறிகளுக்கு $f(x)$-ன் இரண்டாம்நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகள் பின்வருமாறு :

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)}{x_0 - x_2}$$

n நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகளை

$$f(x_0, x_1, x_2 \ldots x_n) = \frac{[\, f(x_0, x_1, x_2 \ldots x_{n-1})\,] - [\, f(x_1, x_2 \ldots x_n)\,]}{x_0 - x_n}$$

என்று எழுதுகிறோம்.

$x_0, x_1, \ldots x_n$ என்ற மாறிகளுக்கு $f(x)$-ன் மதிப்புகளுக்கு வகுபட்ட வேறுபாடுகளின் அட்டவணை பின்வருமாறு :

வகுபட்ட வேறுபாடுகளின் அட்டவணை :

மாறி x	சார்பலன் $f(x)$	முதல்நிலை வகுபட்ட வேறுபாடு $\triangle f(x)$	இரண்டாம்நிலை வகுபட்ட வேறுபாடு $\triangle^2 f(x)$	மூன்றாம்நிலை வகுபட்ட வேறுபாடு $\triangle^3 f(n)$
x_0	$f(x_0)$			
		$f(x_0, x_1)$		
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0, x_1, x_2)$	
		$f(x_1, x_2)$		$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1, x_2, x_3)$	
		$f(x_2, x_3)$		
x_3	$f(x_3)$			

மாதிரி: 1 கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் $f(x)$-ன் மதிப்புகளுக்கு வகுபட்ட வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைக்க.

x:	2	4	9	10
$f(x)$:	4	56	711	980

வகுபட்ட வேறுபாட்டு அட்டவணை.

x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$
2	4			
		$\frac{56-4}{4-2} = 26$		
4	56		$\frac{131-26}{9-2} = 15$	
		$\frac{711-56}{9-4} = 131$		$\frac{23-15}{10-2} = 1$
9	711		$\frac{269-131}{10-4} = 23$	
		$\frac{980-711}{10-9} = 269$		
10	980			

வகுபட்ட வேறுபாடுகளின் தன்மைகள்

1. **சமச்சீர் தன்மை** (Symmetry property) :

வரையறையின்படி $f(x_0, x_1) = \dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$

$$= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$= f(x_1, x_0)$$

$f(x_1, x_0)$ என்று இவ்வாறாக வேறுபாடு சமச்சீர் தன்மையைப் பெற்றுள்ளது. இத் தன்மை எந்த நிலையிலுள்ள வகுபட்ட வேறுபாட்டிற்கும் பொருத்தமானதாக உள்ளது.

மாதிரியாக, $f(x_0, x_1, x_2) = \dfrac{f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)}{x_0 - x_2}$

$$= \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

$$= f(x_1, x_0, x_2) = \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0}$$

$$= f(x_2, x_1, x_0) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. nஆம் படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் nஆம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகள் நிலையெண்ணாகும்.

3. n ஆம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகளை, $(n+1)$ஆம் நிலை வரிசை கொண்ட இரண்டு அணிக் கோவைகளின் ஈவுகளாக அமைக்கலாம்.

நிரூபணம் ;

$$f(x_0, x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma \left\{ \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots\ldots (x_0 - x_n)} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{f(x_0)\,[\,(x_1, x_2, \ldots x_n)\text{-ன் வேறுபாடு - பெருக்கல்}\,]}{(x_0, x_1, x_2, \ldots x_n)\text{ ன் வேறுபாடு - பெருக்கல்}} \right\}$$

வேன்டர் மான்டேயின் அணிக்கோவைக்கான தேற்றம் படி, $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ன் வேறுபாடு - பெருக்கல்:

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots\ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots\ldots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots\ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}_{n \times n}$$

$(x_0, x_1, x_2, \ldots x_n)$-ன் வேறுபாடு - பெருக்கல்

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots\cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots\cdots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots\cdots & x_n^n \end{vmatrix}_{(n\times 1)\times(n+1)}$$

$$\therefore f(x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$$

$$= \Sigma \left\{ f(x_0) \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2^1 & \cdots\cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots\cdots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots\cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}_{n\times n}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots\cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots\cdots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots\cdots & x_n^n \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}} \right\}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots\cdots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots\cdots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots\cdots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots\cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots\cdots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots\cdots & x_n^n \end{vmatrix}}$$

(நி.வே.)

அசம இடைவெளிக்கு நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாடுகளின் சூத்திரம் (Newtons Divided Difference formula for unequal intervals)

$x_0, x_1, \ldots\ldots x_n$ என்ற அவசியமில்லாத (not necessarily) சம இடைவெளியோடு அமையாத மாறிகளுக்கேற்ப $f(x)$-ன் மதிப்புகள் $f(x_0)$, $f(x_1) \ldots\ldots f(x_n)$ ஆக இருக்கலாம். வரையறையின்படி,

$$f(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

அல்லது,

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f(x, x_0)$$

மேலும்,

$$f(x, x_0, x_1) = \frac{f(x, x_0) - f(x_0, x_1)}{x - x_1}$$

அல்லது,

$$f(x, x_0) = f(x_0, x_1) + (x-x_1) f(x, x_0, x_1)$$

இதுபோல்,

$$f(x, x_0, x_1) = f(x_0, x_1, x_2) + (x-x_2) f(x, x_0, x_1, x_2)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f(x, x_0, x_1 \ldots x_{n-1}) = f(x_0, x_1 \ldots, x_n) + (x-x_n) f(x, x_0, x_1 \ldots x_n)$$

$f(x, x_0), f(x, x_0, x_1) \ldots f(x, x_0, x_1 \ldots x_{n-1})$ ஆகியவற்றின் மேற்கண்ட மதிப்புகளை அடுத்தடுத்துப் பிரதியிட, $f(x)$-க்குரிய முதல் சமன்பாடு.

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f(x_0) + (x-x_0) f(x_0, x_1) + (x-x_0)(x-x_1) f(x_0, x_1, x_2) \\ & + \ldots + (x-x_0)(x-x_1) \ldots (x-x_{n-1}) f(x_0, x_1, x_2 \ldots x_n) \\ & + R_n \end{aligned}$$

என்றாகிறது. ...... (3·1)

இங்கு R_n என்பது மீதி உறுப்பாகும் (Remainder term)

$$R_n = (x-x_0)(x-x_1) \ldots (x-x_n) f(x, x_0, x_1 \ldots x_n) \qquad (3.2)$$

$f(x)$ என்பது n ஆம்படி பல்லுறுப்புக் கோவை என்று கொண்டால் $f(x, x_0, x_1 \ldots x_n)$ மறைகிறது.

அதனால்,

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f(x_0) + (x-x_0) f(x_0, x_1) + (x-x_0)(x-x_1) f(x_0, x_1, x_2) \\ & + \ldots + (x-x_0)(x-x_1) \ldots (x-x_{n-1}) f(x_0, x_1 \ldots x_n) \end{aligned}$$

இதுவே, நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரமாகும்.

சமன்பாடு (3.1) ஐ $f(x) = P_n(x) + R_n$ என்று எழுதலாம்.

$f^{n+1}(x)$ இருப்பதாகவும் (exists), தொடர்ச்சியானதாகவும், $f(x, x_0, x_1 \ldots x_n)$ முடிவுள்ளதாகவும், கொண்டால் (3.1)-ன்மூலம் $x_0, x_1 \ldots x_n$ என்ற $(n+1)$ புள்ளிகளுக்கு R_n மறைகிறது.

ரோல் தேற்றம்படி (Rolle's theorem), $R^1{}_n(x)$, n புள்ளிகளுக்கு மிகச் சிறிய, மிகப்பெரிய சார்பு மாறிகளுக்கு மறைகிறது.

இறுதியாக, $R_n(x)$, $x = \xi$ என்ற ஏதோ ஒரு புள்ளியியல்
அதாவது $R_n(\xi) = 0$ மறைகிறது.

எனவே,

$$f^n(\xi) = (n!)\, f(x_0, x_1 \triangle x_n)$$

அல்லது,

$$f(x_0, x_1 \ldots x_n) = \frac{1}{n!} f^n(\xi)\ ;\ x_0 < \xi < x_n$$

அல்லது,

$$f(x, x_0, x_1, \ldots x_n) = \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi),\ x_0 < \xi < x_n$$

$$\therefore R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

நியூட்டன் கிரிகோரி முற்போக்குச் சூத்திரத்தை மேலுள்ள நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்திலிருந்து பெறும்முறை

$x_0, x_1, \ldots\ldots x_n$ என்ற சார்பு மாறிகள் சம இடைவெளியில் அமைந்திருக்கட்டும்.

அதாவது, $(x_1 - x_0) = (x_2 - x_1) = \ldots\ldots = (x_n - x_{n-1}) = h$

மேலும், $x = x_0 + nh$ என்று கொண்டால்,

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h} \Delta f(x_0)$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)}{x_0 - x_2}$$

$$= \frac{\frac{1}{h} \Delta f(x_0) - \frac{1}{h} \Delta f(x_1)}{-2h} = \frac{1}{2!\, h^2} \Delta^2 f(x_0)$$

இவ்வாறாக, வடிவொத்த முறையில் (similarly)

$$f(x_0, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) = \frac{1}{(n!)\, h^n} \Delta^n f(x_0)$$

$f(x_0, x_1)$, $f(x_0, x_1, x_2 \ldots\ldots f(x_0, x_1 \ldots\ldots x_n)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தில் பிரதியிட்டால்,

$$f(x_0 + nh) = f(x_0) + \frac{nh}{1!\, h} f^{-}(x_0) + \frac{nh(nh-h)}{2!\, h^2} \Delta^2 f(x_0)$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{nh\,(nh-h)\,(nh-2h)\ldots\ldots(nh-\overline{n-1}h)}{n!\, h^n} \Delta^n f(x_0)$$

$$= f(x_0) + \binom{n}{1} \Delta f(x_0) + \binom{n}{2} \Delta^2 f(x_0) + \ldots\ldots$$

$$+ \binom{n}{n} \Delta^n f(x_0)$$

இதுவே, நியூட்டன்–கிரிகோரியின் முற்போக்குச் சூத்திரமாகும்.

மாதிரி 2: **கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டு இடைச் செருகல் சூத்திரத்தைப் பயன் படுத்த $f(8)$, $f(15)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.**

x:	4	5	7	10	11	13
$f(x)$:	48	100	294	900	1210	2028

வகுபட்ட வேறுபாட்டு அட்டவணை

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^1 f(x)$
4	48				
		$\frac{100-48}{5-4}=52$			
5	100		$\frac{97-52}{7-4}=15$		
		$\frac{294-100}{7-5}=97$		$\frac{21-15}{10-4}=1$	
7	294		$\frac{202-97}{10-5}=21$		0
		$\frac{900-294}{10-7}=202$		$\frac{27-21}{11-5}=1$	
10	900		$\frac{310-202}{11-7}=27$		0
		$\frac{1210-900}{11-10}=310$		$\frac{33-27}{13-7}=1$	
11	1210		$\frac{409-310}{13-10}=33$		
		$\frac{2028-1210}{13-11}=409$			
13	2028				

நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = f(x_0)+(x-x_0) f(x_0,x_1)+(x-x_0)(x-x_1) f(x_0,x_1,x_2)$$

$$+\ldots + (x-x_0)(x-x_1) \ldots (x-x_n) f(x_0, x_1, \ldots x_n)$$

$$f(8) = 48 + (8-4)\,52 + (8-4)\,(8-5)\,15 + (8-4)\,(8-5)\,(8-7)\,1$$

$$= 448$$

$$f(15) = 48 + (15-4)\,52 + (15-4)\,(15-5)\,15 + (15-4)\,(15-5)\,(15-7)\,1$$

$$= 3150$$

'இலக்ராஞ்ஜி'ன் இடைச்செருகல் சூத்திரம் (Lagrange's interpolation formula)

$x_0, x_1, \ldots x_n$ என்ற இன்றியமைதல் இல்லாத சம இடைவெளியோடு அமையாத (not necessarily equally spaced) சார்பு மாறிகளுக்கேற்ற $y = f(x)$ என்ற சார்பின் $(n+1)$ மதிப்புகள் $f(x_0), f(x_1), \ldots f(x_n)$ என்று கொள்வோம்.

$f(x)$ என்பது nஆம்படி பல்லுறுப்புக் கோவையாகிறது. $P_n(x)$ என்பது x-ன் nஆம்படி பல்லுறுப்புக் கோவை எனில்,

$$P_n(x) = A_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + A_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + \ldots + A_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \quad (3.3)$$

இங்கு A_iக்கள் நிலையெண்களாகும். $i = 0, 1, 2, \ldots n$ நாம் இந்த $(n+1)$ நிலை எண்களை,

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P_n(x_1) = f(x_1), \ldots \quad P_n(x_n) = f(x_n)$$

என்றிருப்பதாகக் காணப்போகிறோம்.

A_0ஐக் காண, $x = x_0$ என்றும் $P_n(x_0) = f(x_0)$ என்றும் (3·3)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$f(x_0) = A_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)$$

$$\therefore A_0 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_n)}$$

வடிவொத்த முறையில்,

$$A_1 = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$A_n = \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

இந்த மதிப்புகளை (3·3)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} f(x_0)$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} f(x_1)$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} f(x_2)$$

$$+ \dots$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} f(x_n) \quad \dots (2)$$

இதுதான் " இலக்ராஞ்ஜி " ன் சூத்திரமாகும்.

மேலுள்ள சூத்திரத்தை,

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{n^1} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\, f(x_r)}{(x_r-x_0)(x_r-x_1)\dots(x_r-x_n)}$$

இங்கு, $\sum^{n1}$ என்பதால் $(x-x_r)$ என்ற காரணி பெருக்கலிலிருந்து நீக்கப்படுகிறது என்று அறிக.

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{n^1} \left[\frac{\phi(x)\; f(x_r)}{(x-x_r)}\right] \frac{1}{(x_r-x_0)(x_r-x_1)\dots(x_r-x_n)}$$

இதில்; $\phi(x) = \prod_{r=0}^{n} (x-x_r)$

எனவே, $\phi^1(x_r) = \left[\frac{d}{d_x}\phi(x)\right]_{x=x_r}$

$$= (x_r-x_0)(x_r-x_1)\dots(x_r-x_n)$$

ஆகவே, $$P_n(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\phi(x)\; f(x_r)}{(x-x_r)\;\phi^1(x_r)} \quad \dots (3\cdot4)$$

இலக்ராஞ்ஜ்' சூத்திரத்திற்கு மீதி உறுப்புகள்

$P_n(x)$ என்பது, $f(x)$-ன் சார்பாக அமைந்த nஆம்படி பல்லுறுப்புக் கோவை என்க. $f(x)$ என்பது, $(n+1)$ ஆம்படி தொடர்ச்சியான வகைக் கெழுவை (derivative) $x_0 \leqslant x \leqslant x_n$ என்ற இடைச் செருகலின் இடைவெளியில் பெற்றிருக்கட்டும்.

$P_n(x)$-ன் மதிப்புகள், $x_0, x_1 \ldots x_n$ என்ற புள்ளிகளில் $f(x)$-ன் மதிப்பையே பெற்றிருப்பதால் $f(x) = P_n(x) + g(x)$. இங்கு, $g(x)$ என்பது $x_0, x_1 \ldots x_n$ என்ற தீர்வுகளைப் பெற்றுள்ளது.

$$\therefore f(x) = p_n(x) + k(x)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

இங்கு, $k(x)$ஐ $f(x)$-ன் சார்பாகக் காணவேண்டும்.

$\phi(t) = f(t) - p_n(t) - k(x)(t-x_0)(t-x_1)\ldots(t-x_n)$ என்ற சார்பைக் கருதுக. ...... (3·5)

$x, x_0, x_1 \ldots x_n$ என்ற $(n+2)$ மெய்யான தீர்வுகளுக்கு (positive roots) $\phi(t)$ மறைகிறது.

ஆகவே, ரோல் தேற்றம்படி $\phi(t)$ ஆனது $(n+1)$ தீர்வுகளைப் பெற்று மேலுள்ள தீர்வுகளின் மிகச் சிறியதும் மிகப் பெரியதுமான தீர்வுகளுக்கிடையே அமைகிறது. இதுபோல் $\phi^{11}(t)$ குறைந்தது n தீர்வுகளையாவது பெற்று அதே இடைவெளியில் அமைகிறது. இறுதியாக, $(n+1)$ஆம்படி வகைக் கெழுவான $\phi^{n+1}(t)$ குறைந்தது ஒரு தீர்வான $t = \xi$ஐப் பெற்று x_0-லிருந்து x_n என்ற இடைவெளியில் அமைகிறது.

மேலும், (3·5)-லிருந்து $\phi^{n+1}(t) = f^{n+1}(t) - kx(n+1)!$ ஏனெனில், $p_n^{n+1}(t) = 0$ ஆகும்).

எனவே,

$$K(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi), \quad x_0 < \xi < x_n$$

$k(x)$-ன் மதிப்பை (3·5)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$f(x) = p_n(x) + f^{n+1}(\xi) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!}$$

அதனால் துண்டித்தலின் பிழை (truncation error).

$$= R_n = f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)$$

$$= \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \ldots \quad (3\cdot6)$$

இதுதான் 'இலக்ராஞ்ஜ்' சூத்திரத்தின் மீதி உறுப்பாகும்.

கவனிக்கவும் :

$(x-x_0) = (x-a) = hu$

$(x-x_1) = (x-a+h) = h(u-1)$ ...... முதலியவற்றை

$(x-x_0), (x-x_1)$ ...... ஆகியவற்றுக்கு (3·6)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$R_n = \frac{u(u-1)\ldots(u-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{n+1}(\xi)$$

$$= \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} f^{n+1}(\xi), \quad x_0 < \xi < x_n$$

இதுவே, நியூட்டன் கிரிகோரியின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தின் மீதி உறுப்பாகும்.

நியூட்டன் - கிரிகோரியின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தின் மீதி உறுப்பைக் காணும் முறை

$f(x) = P_n(x) + k(x)(x-x_n)(x-x_{n-1}) \ldots\ldots (x-x_0)$ என்று கொள்க. இதில், $k(x)$ஐ $f(x)$-ன் சார்பாக அமைக்கவேண்டும்.

$\phi(t) = f(t) - P_n(t) - k(x)(t-x_n)(t-x_{n-1})(t-x_0)$

$x_0 < \xi < x_n$ என்ற சார்பைக் கருதுக.

$t = \xi$ என்ற மதிப்புக்கு $\phi^{n+1}(t) = 0$ என்பதால்,

$0 = f^{n+1}(\xi) - 0 - k(x)(n+1)!$

அல்லது, $k(x) = f^{n+1}(\xi) / (n+1)!$

எனவே, பிழை $R_n = f^{n+1}(\xi)$

$$\frac{(x-x_n)(x-x_{n-1}) \ldots (x-x_0)}{(n+1)!}$$

இதில், $(x-x_n) = hu, (x-x_{n-1}) = h(u+1) \ldots\ldots (x-x_0) = h(u+n)$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$R_n = u(u-1)\ldots(u+n) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)$$

மாதிரி 3 : மகை 47க்கு இடைச்செருகலின் துல்லியத்தை இலக்ரான்ஜ்-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

x	$f(x) =$ மகை x
40	1·6020600
42	1·6232493
45	1·6532126
48	1·6812413
49	1·6901960
50	1·6989700

$x_0 = 40,\ x_1 = 42,\ x_2 = 45,\ x_3 = 48,\ x_4 = 49,\ x_5 = 50$ எனக் கொண்டு இலக்ரான்ஜின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினால்,

$$f(47) = \frac{5(2)(-1)(-2)(-3)}{(-2)(-5)(-8)(-9)(-10)} f(x_0) + \frac{7(2)(-1)(-2)(-3)}{2(-3)(-6)(-7)(-8)} f(x_1) + \cdots + \frac{7(5)(2)(-1)(-2)}{10(8)(5)(2)(1)} f(x_5)$$

$$= \frac{1}{120} f(x_0) - \frac{1}{24} f(x_1) + \frac{7}{30} f(x_2) + \frac{35}{24} f(x_3) - \frac{5}{6} f(x_4) + \frac{7}{40} f(x_5)$$

$$= \frac{1}{120}(1\cdot6020600) - \frac{1}{24}(1\cdot6232493) + \frac{7}{30}(1\cdot6532126) + \frac{35}{24}(1\cdot6812413) - \frac{5}{6}(1\cdot6901960) + \frac{7}{40}(1\cdot6989700)$$

$$f(47) = 1\cdot6720980.$$

$$\therefore f(47) = \text{மகை } 47 = 1\cdot6720980$$

இங்கு, $n = 5$; மீதியுறுப்பு (remainder term),

$$R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = \frac{7(5)(2)(-1)(-2)(-3)}{6!} f^6(\xi)$$

$$= -\frac{7}{12} f^6(\xi), \quad 40 < \xi < 50$$

இப்போது,

$$f^{6}(\xi) = \frac{d6}{dx6}\ (\text{மகை } x) = \frac{5!}{x^{6}}\ \frac{e}{10}$$

எனவே,

$$f^{6}(\xi) < \frac{70}{(40)^{6}}\ \text{மகை } \frac{e}{10} < 0{\cdot}73 \times 10^{-8}$$

இடைச் செருகலின் பிழை 8ஆம் தசமத்தில் (8th decimal) 1 அலகைவிடக் (one unit) குறைந்து காணப்படுகிறது.

மாதிரி 4: நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி மகை (1·24)ஐ இடைச் செருகி உச்சப் பிழையைக் காண்க.

x ;	1·02	1·03	1.04	1·05	1·06
$f(x)$:	0·0086002	0·0128372	0·0170333	0·0211893	0·0252059

வேறுபாட்டு அட்டவணை

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1·02	0·0086002				
		0·0042370			
1·03	0·0128372		−0·0000409		
		0·0041961		0·0000008	
1·04	0·0170333		−0·0000401		−0·0000001
		0·0041560		0·0000007	
1·05	0·0211893		−0·0000394		
		0·0041166			
1·06	0·0252059				

இங்கு, $y_0 = 0{\cdot}0086002,\ \Delta y_0 = 0{\cdot}0042370$

$$\frac{1}{2\,!}\ \Delta^{2} y_0 = -\ 0{\cdot}00002045,\ \frac{1}{3\,!}\ \Delta^{3} y_0 = 0{\cdot}00000013$$

$$h = 0{\cdot}01 = 10^{-2}\ ;\ u = \frac{1{\cdot}024 - 1{\cdot}02}{0{\cdot}01} = 0{\cdot}4$$

$$(u-1) = -\ 0{\cdot}6$$

$$(u-2) = -\ 1{\cdot}6$$

நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரம்,

$$y = y_0 + u^{(1)} \Delta y_0 + \frac{1}{2!} u^{(2)} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3!} u^{(3)} \Delta^3 y_0 + \ldots$$

$$\text{மகை } (1{\cdot}24) = 0{\cdot}0086002 + 0{\cdot}4 \ ({\cdot}0043370) + ({\cdot}04)(-0{\cdot}6)$$
$$(-0{\cdot}00002045) + (0{\cdot}4)(-0{\cdot}6)({\cdot}00000013)$$

அல்லது, மகை $(1{\cdot}024) = 0{\cdot}01030000$ (சுருக்கிய பின்பு) மீதி

உறுப்புப்பிழை : $R_n = \dfrac{u^{(n+1)}}{(n+1)!} h^{n+1} f^{n+1}(\xi), \quad x_0 < \xi < x_n$

$$= \frac{u^{(4)}}{4!} \quad h^4 f^4(\xi) \ [\text{ஏனெனில் } n=3]$$

$$= (0{\cdot}4)(-0{\cdot}6)(-1{\cdot}6)(-2{\cdot}6) \frac{10^8}{4!}$$

$$\left(\frac{d^4 \text{ மகை } x}{dx^4}\right)_x = \xi$$

இங்கு, $1{\cdot}02 < \xi < 1{\cdot}05$

ஆனால், $\dfrac{d^4 (\text{மகை } x)}{dx^4} = -\dfrac{3!}{x^4} \log_{10} e$

இடைச்செருகலில் துண்டித்தலின் பிழை (truncation error) ϵ $(0{\cdot}892)\,10^{-8} < \epsilon < (1{\cdot}002)\,10^{-8}$ என்றவாறு அமைகிறது.

மாதிரி 5: பின்வரும் அட்டவணையிலிருந்து $f(5)$-ன் மதிப்பை 'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரம் மூலம் காண்க.

x:	1	3	4	6	10
$f(x)$:	0	18	48	180	900

'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} f(x_0)$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} f(x_1)$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} f(x_n)$$

$$f(x) = \frac{(x-3)(x-4)(x-6)(x-10)}{(1-3)(1-4)(1-6)(1-10)} (0)$$

$$+ \frac{(x-1)(x-4)(x-6)(x-10)}{(3-1)(3-4)(3-6)(3-10)} (18)$$

$$+ \frac{(x-1)(x-3)(x-6)(x-10)}{(4-1)(4-3)(4-6)(4-10)} (48)$$

$$+ \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-10)}{(6-1)(6-3)(6-4)(6-10)} (180)$$

$$+ \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)}{(10-1)(10-3)(10-4)(10-6)} (900)$$

இங்கு $x = 5$ என்பதால்,

$$f(5) = \frac{2(1)(-1)(-5)}{(-2)(-3)(-5)(-9)} (0) + \frac{(4)(1)(-1)(-5)}{(2)(-1)(-3)(-7)} (18)$$

$$+ \frac{(4)(2)(-1)(-5)}{(3)(1)(-2)(-6)} (48) + \frac{(4)(2)(1)(-5)}{(5)(3)(2)(-4)} (180)$$

$$+ \frac{(4)(2)(1)(-5)}{(9)(7)(6)(4)} (900) = -\frac{60}{7} + \frac{160}{3} + 60 - \frac{10}{21} = 100$$

மாதிரி 6 : இலக்ரான்ஜ்-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி மேலுள்ள மாதிரியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணைக்கான $f(x)$-ன் அமைப்பைக் காண்க.

இலக்ரான்ஜ்-ன் சூத்திரத்தைக் கருதினால்,

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} f(x_0)$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} f(x_1)$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} f(x_n)$$

$$= \frac{(x-3)(x-4)(x-6)(x-10)}{(1-3)(1-4)(1-6)(1-10)}(0)$$

$$+ \frac{(x-1)(x-4)(x-6)(x-10)}{(3-1)(3-4)(3-6)(3-10)}(18)$$

$$+ \frac{(x-1)(x-3)(x-6)(x-10)}{(4-1)(4-3)(4-6)(4-10)}(48)$$

$$+ \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-10)}{(6-1)(6-3)(6-4)(6-10)}(180)$$

$$+ \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)}{(10-1)(10-3)(10-4)(10-6)}(900)$$

$$f(x) = -\frac{3}{7}(x^4 - 21x^3 - 144x^2 - 364x + 240)$$

$$+\frac{4}{3}(x^4 - 20x^3 + 127x^2 - 288x + 180)$$

$$-\frac{3}{2}(x^4 - 18x^3 + 99x^2 - 202x + 120)$$

$$+\frac{25}{42}(x^4 - 14x^3 + 67x^2 - 126x + 72)$$

$$= x^3 - x^2$$

மாதிரி 7: இலக்ரான்ஜ்-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தித் தோராயமாக, $u_0 = \frac{1}{2}(u_1+u_{-1}) - \frac{1}{16}(u_3-u_1) - (u_{-1}-u_{-3})$ என்பதை நிறுவுக.

$$\left.\begin{array}{l} x: \ -3,\ -1,\ 1,\ 3 \\ u_x: \ u_{-3},\ u_{-1}\ u_1,\ u_3 \end{array}\right\} \text{கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.}$$

பின்பு, $$u_x = \frac{(x+1)(x+1)(x-3)}{(-2)(-4)(-6)} u_{-3}$$

$$+ \frac{(x+3)(x-1)(x-3)}{(2)(-2)(-4)} u_{-1}$$

$$+\frac{(x+3)(x+1)(x-3)}{(4)(2)(-2)}u_1$$

$$+\frac{(x+3)(x+1)(x-1)}{(6)(4)(2)}u_3$$

இதில், $x = 0$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$u_0 = \frac{1(-1)(-3)}{(-2)(-4)(-6)}u_{-3} + \frac{(3)(-1)(-3)}{(2)(-2)(-4)}u_{-1}$$

$$+\frac{(3)(1)(-3)}{(4)(2)(-2)}u_1 + \frac{(3)(1)(-1)}{(6)(4)(2)}u_3$$

$$= -\frac{1}{16}u_{-3} + \frac{9}{16}u_{-1} + \frac{9}{16}u_1 - \frac{1}{16}u_3$$

$$= \frac{8}{16}u_{-1} + \frac{8}{16}u_1 + \frac{1}{16}u_1 + \frac{1}{16}u_{-1} - \frac{1}{16}u_{-3} - \frac{1}{16}u_3$$

$$= \frac{1}{2}(u_{-1} + u_1) - \frac{1}{16}\left[(u_3 - u_1) - (u_{-1} - u_{-3})\right]$$

மாதிரி 8:

$$\left.\begin{aligned} f(x_1\ x_0) &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ f(x_2, x_0) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \end{aligned}\right\}$$

என்ற முதல்நிலை வேறுபாடுகளும்.

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_2 . x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_1} \ldots \text{etc.,}$$

என்ற இரண்டாம்நிலை வேறுபாடுகளும் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், $f(x) = x^3 - x$ என்ற சார்புக்கு $f(3, 4, 5, 6)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$f(3, 4, 5, 6) = \frac{f(3, 4, 5) - f(4, 5, 6)}{3-6}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{f(3, 4,) - f(4, 5)}{3-5} - \frac{f(4, 5) - f(5, 6)}{4-6}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{f(3)-f(4)}{-1} - \frac{f(4)-f(5)}{4-5}\right]$$

$$= -\frac{1}{6}\left[\frac{f(4)-f(5)}{4-5}\right] + \frac{1}{6}\left[\frac{f(5)-f(6)}{5-6}\right]$$

$$= \frac{1}{6}[f(4)-f(3)+f(4)-f(5)+f(4)-f(5)+f(6)-f(5)]$$

$$= \frac{1}{6}[f(6)-3f(5)+3f(4)-f(3)]$$

$$= \frac{1}{6}(210-360+180-24) = \frac{1}{6}(6) = 1$$

மாதிரி 9: 0-லிருந்து $(n-1)$ வரை u_x-ன் எல்லாத் தொகை மதிப்புகளும் கொடுக்கப்பட்டு இருந்தால் u_x-ஐப் பின்வரும் கோவையாக (expression) எழுதலாம் என்பதைக் காட்டுக.

$$\frac{x!}{(x-n)!(n-1)!}\left[\frac{u_{n-1}}{x+n-1} - \binom{n-1}{1}\frac{u_{n-2}}{x-n+2} + \binom{n-1}{2}\frac{u_{n-3}}{x-n+3} - \ldots\ldots \pm \binom{n-1}{n-1}\frac{u_0}{x}\right]$$

$$x = (n-1),\ (n-2),\ (n-3)\ \ldots\ldots,\ 1,\ 0$$

$$u_x = u_{n-1},\ u_{n-2},\ u_{n-3}\ \ldots\ldots,\ u_1,\ u_0$$

இலக்ராஞ்ஜ்-ன் சூத்திரத்தின்படி,

$$u_x = \frac{(x-n+2)(x-n+3)\ldots(x-1)(x)}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ldots(n-2)(n-1)}u_{n-1}$$

$$+ \frac{(x-n+1)(x-n+3)\ldots(x+1)(x)}{(-1)(1)(2)\ldots(n-3)(n-2)}u_{n-2}$$

$$+ \frac{(x-n+1)(x-n+2)\ldots(x-1)(x)}{(-2)(-1)(1)(2)\ldots(n-3)}u_{n-3} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(x-n+1)(x-n+2)\ldots(x-1)}{[-(n-1)]\times[-(n-2)]\times\ldots\times(-2)(-1)}$$

$$= \frac{(x-n+1)(x-n+2)\dots(x-1)(x)}{(n-1)\,!} \quad \frac{u_{n-1}}{x-n+1}$$

$$+ \frac{(n-1)(x-n+1)(x-n+2)\dots x}{(-1)(n-1)\,!} \quad \frac{u_{n-2}}{x-n+2}$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)(x-n+1)(x-n+2)\dots(x-1)(x)}{(n-1)\,!} \quad \frac{u_{n-3}}{x-n+3}$$

$$+\dots \pm \frac{(n-1)(n-2)\dots 1 \quad (x-n+1)(x-n+2)\dots(x-1)x}{(n-1)\,!} \quad \frac{u_0}{x}$$

$$= \frac{x\,!}{(x-n)\,!\,(n-1)\,!}\left[\frac{u_{n-1}}{x-n+1} - \binom{n-1}{1}\frac{u_{n-2}}{x-n+2} + \binom{n-1}{2}\frac{u_{n-3}}{x-n+3} + \dots \pm \binom{n-1}{n-1}\frac{u_0}{x}\right]$$

பயிற்சி 3

1. x_1, x_2, x_3, x_4, என்ற சார்பு மாறிகள் கொண்ட $f\,x, = \frac{1}{x}$ என்ற சார்புக்கு மூன்றாம்நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகள் $-\frac{1}{x_1, x_2, x_3, x_4}$ என்பதை நிறுவுக.

2. $f(x) = \frac{1}{x}$ என்ற சார்புக்கு a, b, c, d என்ற சார்பு மாறி முதல் மூன்று வகுபட்ட வேறுபாடுகளைக் காண்க.

3. $f(x)$ ன் வகுபட்ட வேறுபாடான $f(x_0, x_1, \dots x_n)$ஐ $x_0, x_1 \dots x_n$ என்ற சார்பு மாறிகளுக்கேற்ப சமச்சீர்த் தன்மையைப் பெற்றுள்ளது என்பதை நிறுவுக.

4. nஆம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகளை $(n+1)$ஆம் நிலை வரிசை (order) கொண்ட இரண்டு அணிக்கோவைகளின் (determinants) ஈவுகளாக அமைக்கலாம் என்பதை நிறுவுக.

5. கீழ்க்கண்ட அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி வகுபட்ட வேறுபாடுகளைக் காண்க.

x:	1	2	4	7	12
$f(x)$:	22	30	82	106	216

6. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி மகை (656)-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x:	654	658	659	661
மகை x :	2·8156	2·8182	2·8189	2·8202

7. $y_{35\cdot0} = 1175$, $y_{35\cdot5} = 1280$, $y_{39\cdot5} = 2180$, $y_{40\cdot5} = 24$[illegible]0 எனில், (i) முற்போக்கு வேறுபாடுகளைப் பயன்படுத்தியும் (ii) வகுபட்ட வேறுபாடுகளைப் பயன்படுத்தியும் y_{40}-ன் மதிப்பைக் காண்க.

8. இலக்ராஞ்ஜ்-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளுக்குரிய $(x-5)$ ஆம்படி பல்லுறுப்புக் கோவையான $f(x)$ஐக் காண்க.

x:	0	2	3	4	7	9
$f(x)$:	4	26	58	112	466	922

9. $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 8, f(4) = 16, f(7) = 128$ என்று கொடுக்கப்பட்டால், இலக்ராஞ்ஜ்-ன சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f(5)$, $f(6)$, ஆகியவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

10. நியூட்டன் கிரிகோரியின் சூத்திரத்தை நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்திலிருந்து நிறுவுக.

11. நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தை (i) மீதி உறுப்போடு நிறுவுக. (ii) மீதி உறுப்புடன் கூடிய நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்திலிருந்து நியூட்டன் கிரிகோரியின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தை வருவிக்க.

12. u_{-1}, u_0, u_1, u_2 என்ற 4 சம இடைவெளியுள்ள மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டு, ஒரு மதிப்பை இலக்ராஞ்ஜ்-ன் சூத்திரம் மூலம் இடைச் செருகல் செய்தால் அதனைப் பின்வரும் உருவத்தில் எழுதலாம் என்று காண்க.

$$u_x = yu_0 + xu_1 + \frac{y(y^2-1)}{3!}\Delta^2 u_{-1} + \frac{x(x^2-1)}{3!}\Delta^2 u_0$$

இதில், $x + y = 1$

13. கீழ் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் சார்பின் உருவம் என்ன என்பதைக் காண்க.

(i)

x :	0	1	2	5
$f(x)$:	2	3	12	147

(ii)

x :	0	1	4	5
$f(x)$:	8	11	78	123

14. இலக்ராஞ்ஜ்-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி,

$y_0 = \frac{1}{2}[y_1 + y_{-1}] - \frac{1}{8}[\frac{1}{2}(y_3 - y_1) - \frac{1}{2}(y_{-1} - y_{-3})]$ என்பதை நிறுவுக.

15. நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி மகை$_{10}$ 4·01-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	மகை x
4·0002	0·6020817
4·0104	0·6031877
4·0233	0·6045824
4·0294	0·6052404

16. கீழுள்ள அட்டவணையிலிருந்து நியூட்டனின் பிற்போக்கு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் $x = 33·2416$-க்கான மதிப்பைக் காண்க.

x	$f(x)$
29	4·0723
30	3·1072
31	3·1431
32	3·1748
33	3·2075
34	3·23961

17. கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து 35 வயதிற்குக் குறைவான குற்றவாளிகளின் சதவீதத்தை இலக்ராஞ்ஜ்-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

வயது :	< 25	< 30	< 40	< 50
குற்றவாளிகளின் சதவீதம் :	52·0	67·3	84·1	94·4

18. இலக்ராஞ்ஜ்-ன் சூத்திரத்தை மீதி உறுப்போடு நிறுவுக. இச் சூத்திரத்திற்கும் நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்திற்கும் வேறுபாடு உண்டா என்று ஆராய்க.

19. $y_0, y_1, y_2 \ldots y_6$ என்பவை ஒரு தொடரின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் எனில்,

$y_3 = 0·03(y_0 + y_6) - 0·3(y_1 + y_5) + 0·75(y_2 + y_4)$ என்பதை நிறுவுக.

20. இலக்ராஞ்ஜ்-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $y_1 = y_3 - 0·3$ ([illegible]) $+ 0·2(y_{-3} + y_{-5})$ (தோராயமாக) என்பதை

PUB

4. மைய வேறுபாட்டு இடைச்செருகல் சூத்திரங்கள்

(Central difference Interpolation formula)

இலக்ராஞ்ஜ்ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டுமெனில், மிகக் கடினமான கணிப்பு முறைகள் தேவைப்படுகின்றன. சார்பற்ற மாறிகளின் மதிப்புகள் மிகத்தள்ளியிருப்பதால், துல்லியமான விடைகளைப் பெறமுடிவதில்லை. பொதுவான நியூட்டனின் சூத்திரங்கள் துரிதமாகக் குவிவதில்லை. மேலும், x-க்குரிய, $f(x)$-ன் இடைச்செருகலின் மதிப்பு மையத்திலோ, அல்லது மையத்திற்கு அருகிலோ இருந்தால், முன்னணி வேறுபாடுகளை அடிப்படையாகக்கொண்ட நியூட்டனின் சூத்திரம் துல்லியமான விடையை அளிப்பதில்லை. மைய வேறுபாடுகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட இடைச் செருகல் சூத்திரங்களுக்கு மைய வேறுபாட்டுச் சூத்திரங்கள (Central difference formulae) என்று பெயர். இந்த மைய வேறுபாட்டுச் சூத்திரங்கள் நியூட்டனின் சூத்திரங்களைவிட மிகத் துரிதமாகக் குவிகின்றன. சில சமயங்களில் நமக்குச் சௌகரியமான புள்ளிகளுக்கு மையத்தை மாற்றிக்கொள்ளவும் முடியும்.

மாதிரியாக, $u_0, u_1, u_2 \ldots\ldots$ என்ற சார்பலன்களின்

மதிப்புகள் $u_{-3}, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, \ldots u_n$ என்ற சார்பலன் மதிப்புகளாக மாறுகின்றன

மைய வேறுபாட்டுக் குறியீடு (Central difference notation)

செயலிகள் δ, ∇, μ : சார்பு $f(x)$-ன் முதல் நிலை மைய வேறுபாட்டை $\delta f(x)$ என்று குறிக்கிறோம்.

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)$$

$$= \left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right) f(x) \quad \text{இங்கு } E = 1 + \Delta$$

h என்பது, இடைவெளித் தூரம்.

எனவே,

$$\delta \equiv \left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right) \quad \ldots \quad (4\cdot1)$$

சார்பு $f(x)$-ன் முதல்நிலை ஏறுகின்ற (ascending) வேறுபாட்டை $\nabla f(x)$ என்று குறிக்கிறோம்.

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$
$$= (1 - E^{-1}) f(x)$$

எனவே, $\nabla \equiv (1 - E^{-1})$ ...... (4 2)

∇ என்பதைப் பிற்போக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி எனவும், ∇ என்பதை முற்போக்கு மாற்றுச் செயலி எனவும் கூறுகிறோம்.

(4·1)ஐ $\delta = (E-1) E^{-\frac{1}{2}}$ என்று எழுதலாம்.

அதாவது, $\delta = \Delta E^{-\frac{1}{2}}$ ...... (4·3)

(4·2) ஐ $\nabla = (E-1) E^{-1}$

$$\nabla = \Delta E^{-1}$$
$$\nabla = (\Delta E^{-\frac{1}{2}}) E^{-\frac{1}{2}}$$
$$\nabla = \delta E^{-\frac{1}{2}}$$

அல்லது. $\delta = \nabla E^{\frac{1}{2}}$ ...... (4·4)

(4·3), (4·4)-ன் மூலம் $\delta = \Delta E^{-\frac{1}{2}} = \nabla E^{\frac{1}{2}}$ ... (4·5) என்று அறிகிறோம். y_x-க்குச் செயல்படுத்தும் இச் செயல்களின் nஆம் படியை

$$\delta^n y_x = \Delta^n E^{-\frac{n}{2}} y_x = \nabla^n E^{\frac{n}{2}} y_x$$

அல்லது, $\delta^n y_x = \Delta^n y_{x-\frac{n}{2}} = \nabla^n y_{x+\frac{n}{2}}$ என்று குறிக்கிறோம்.

μ என்ற செயலியைச் சராசரி (average) என்று கூறுகிறோம்.

இதனைப் பின்வருமாறு கூறுகிறோம்.

$$\mu = \tfrac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$\therefore \mu y_x = \tfrac{1}{2}\left(y_{x+\frac{1}{2}} + y_{x-\frac{1}{2}}\right)$$

மேலும், $\mu \delta^n y_x = \frac{1}{2}\left(\delta^n y_{x+\frac{1}{2}} = \delta^n y_{x-\frac{1}{2}}\right)$

$$\mu^2 y_x = \frac{1}{4}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right)^2 y_x$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + 4\right] y_x$$

$$= \frac{1}{4}\left[\delta^2 + 4\right] y_x$$

$$= 3\left(1 + \frac{1}{4}\delta^2\right) y_x$$

$$\therefore \mu^2 = \left(1 + \frac{1}{4}\delta^2\right) \quad \ldots\ldots \quad (4{\cdot}6)$$

$$\delta y_x = y_{x+\frac{1}{2}} - y_{x-\frac{1}{2}}$$

$\mu y_x = \frac{1}{2}\left(y_{x+\frac{1}{2}} + y_{x-\frac{1}{2}}\right)$ என்பதால்,

$$2\mu y_x + \delta y_x = 2 y_{x+\frac{1}{2}}$$

அல்லது, $(2\mu + \delta) y_x = 2E^{\frac{1}{2}} y_x$

$$\therefore 2\mu + \delta = 2E^{\frac{1}{2}}$$

அல்லது, $E^{\frac{1}{2}} = \mu + \frac{\delta}{2}$

ஆனால், $E = eu$; $U = hD$

$$\therefore \delta = \left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right) = 2 \sin h \frac{U}{2}$$

$$\mu = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right) = \cos h \frac{U}{2}$$

δ-ன் வரையறைப்படி மைய வேறுபாட்டு அட்டவணை பின்வருமாறு :

y_{-2}		$\delta^2 y_{-2}$		$\delta^4 y_{-2}$
	$\delta y_{-\frac{3}{2}}$		$\delta^3 y_{-\frac{3}{2}}$	
y_{-1}		$\delta^2 y_{-1}$		$\delta^4 y_{-1}$
	$\delta y_{-\frac{1}{2}}$		$\delta^3 y_{-\frac{1}{2}}$	
y_0		$\delta^2 y_0$		$\delta^4 y_0$
	$\delta y_{\frac{1}{2}}$		$\delta^3 y_{\frac{1}{2}}$	
y_1		$\delta^2 y_1$		$\delta^4 y_1$
	$\delta y_{\frac{3}{2}}$		$\delta^3 y_{\frac{3}{2}}$	
y_2		$\delta^2 y_2$		$\delta^4 y_2$

மேலுள்ள அட்டவணையில் y_{-1}, y_1 இவற்றிற்குரிய கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட $\delta y_{-\frac{1}{2}}$, $\delta y_{\frac{1}{2}}$, $\delta^2 y_0$, $\delta^3 y_{-\frac{1}{2}}$, $\delta^3_{\frac{1}{2}}$, $\delta^4 y_0$ ...... என்ற வேறுபாடுகள் மைய வேறுபாடுகள் எனப்படும்.

'நியூட்டன் காஸ்'-ன் சூத்திரங்கள்

$$y_u = y_0 + \binom{u}{1}\Delta y_0 + \binom{u}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{u}{3}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2 ...... என்ற சம இடைவெளி மதிப்புகளைப் (1 அலகு) பெற்ற சார்பாக y_uஐக் கருதவும்.

இதில்,

$$u = \frac{x - x_0}{h}$$

$\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, $\Delta^4 y_0$ ஆகிய முன்னணி வேறுபாடுகளை

$$\Delta^2 y_0 = \Delta^2 y_{-1} + \Delta^3 y_{-1}$$

$\Delta^3 y_0 = \Delta^3 y_{-1} + \Delta^4 y_{-1}$ etc. என்று எழுதலாம்.

ஆனால், $\Delta^3 y_{-1} = \Delta^3 y_{-2} + \Delta^4 y_{-2}$

$$\Delta^4 y_{-1} = \Delta^4 y_{-2} + \Delta^5 y_{-2} \text{ etc.}$$

இவற்றை நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தில் பிரதியிட

$$\therefore y_u = y_0 + \binom{u}{1}\Delta y_0 + \binom{u}{2}(\Delta^2 y_{-1} + \Delta^3 y_{-1})$$

$$+ \binom{u}{4}(\Delta_3 y_{-1} + \Delta^4 y_{-})$$

$$+ \binom{u}{4}(\Delta^4 y_{-1} + \Delta^5 y_{-1}) + \ldots\ldots$$

$$= y_0 + \binom{u}{1}\Delta y_0 + \binom{u}{2}\Delta^2 y_{-1} + \left[\binom{u}{2} + \binom{u}{3}\right]\Delta^3 y_{-1}$$

$$+\binom{u}{3}(\Delta^4 y_{-2} + \Delta^5 y_{-2}) + \binom{u}{4}$$

$$[\Delta^4 y_{-2} - \Delta^5 y_{-2} + \Delta^5 y_{-1}] + \ldots\ldots$$

$$= y_0 + \binom{u}{1}\Delta y_0 + \binom{u}{2}\Delta^2 y_{-1} + \binom{u+1}{3}\Delta^3 y_{-1}$$

$$+ \binom{u+1}{4}\Delta^4 y_{-2} + \cdots + \binom{u+k-1}{2k-1}\Delta^{2k-1} y_{-k+1}$$

$$+ \binom{u+k-1}{2k}\Delta^{2k} y_{-k} + \ldots\ldots\ldots \qquad (4\cdot7)$$

இது காஸின் சம இடைவெளிக்கான முற்போக்குச் சூத்திரமாகும். இச் சூத்திரம், ஒற்றை வேறுபாடுகளை (odd differences) மையக் கோட்டுக்குக் கீழாகவும், இரட்டைப்படை வேறுபாடுகளை (even differences) மையக் கோட்டுக்கு நேராகவும் கையாளுகிறது. u நேர்த்திசையில் (positive direction) அளக்கப்பட்டால் காஸின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம். அவ்வாறில்லாமல் u எதிர்த்திசையில் அளக்கப்பட்டால் காஸின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தவேண்டும்.

காஸின் பிற்போக்குச் சூத்திரம் (Gauss's backward Formula)

$$\Delta y_0 = \Delta y_{-1} + \Delta^2 y_{-1}$$

$$\Delta^3 y_{-1} = \Delta^3 y_{-2} + \Delta^4 y_{-2} \ldots\ldots$$

ஆகியவற்றை 4·7-லுள்ள காஸின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தில் பிரதியிட்டு உறுப்புகளைக் குலப்படுத்தினால் (grouping the terms),

$$y_u = y_0 + \binom{u}{1}\Delta y_{-1} + \binom{u+1}{2}\Delta^2 y_{-1}$$

$$+ \binom{u+1}{3}\Delta^3 y_{-2}$$

$$+ \binom{u+2}{4}\Delta^4 y_{-2} + \cdots + \binom{u+k-1}{2k-1}\Delta^{2k-1} y_{-k}$$

$$+ \binom{u+k}{2k}\Delta^{2k} y_{-k} + \ldots\ldots \qquad (4\cdot8)$$

என்ற காஸின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பெறுகிறோம்.

இச் சூத்திரம் ஒற்றைப்படை வேறுபாடுகளை y_0-லிருந்து மையக் கோட்டுக்கு மேலாகவும், இரட்டைப்படை வேறுபாடுகளை மையக் கோட்டுக்கு நேராகவும் கையாளுகிறது.

ஸ்டார்லிங்கின் சூத்திரம் (Stirling's Formula)

(4·7)-லுள்ள காஸின் முற்போக்குச் சூத்திரத்திற்கும் (4·8)-ல் உள்ள காஸின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்திற்கும் சராசரியைக் கண்டால்,

$$y_u = y_0 + \frac{u}{2}\left[\Delta y_0 + \Delta y_{-1}\right] + \frac{u^2}{2!}\Delta^2 y_{-1}$$

$$+ \frac{u(u^2-1)^2}{3!}\frac{1}{2}\left[\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}\right] + \frac{u^2(u^2-1)^2}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{u^2(u^2-1^2)(u^2-2^2)\ldots\left[u^2-(k-1)^2\right]}{(2k-1)!}\frac{1}{2}\left[\Delta^{2k-1}_{y_{-k+1}} + \Delta^{2k}_{y_{-k}}\right]$$

$$+ \frac{u^2(u^2-1^2)(u^2-2^2)\ldots\left[u^2-(k-1)^2\right]}{(2k)!}\Delta^{2k}_{y_{-k}}$$

இதுவே ஸ்டார்லிங்கின் சூத்திரமாகும். இது மையக்கோட்டுக்கு மேலும் கீழும் உள்ள ஒற்றைப்படை வேறுபாடுகளின் சராசரியையும், இரட்டைப் படை வேறுபாடுகளை மையக்கோட்டுக்கு நேராகவும் கையாளுகிறது. இச் சூத்திரத்தில் uஆனது $[-2, 2]$ ஆகிய இடைவெளியில் அமைகிறது.

மேலுள்ள ஸ்டார்லிங்கின் சூத்திரத்தை மைய வேறுபாட்டுச் செயலிகளைக் கொண்டு (central difference notation) பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$y_u = y_0 + u\mu\delta y_0 + \frac{u^2}{2!}\delta^2 y_0 + \frac{u(u^2-1)}{3!}\mu\delta^3 y_0 + \ldots \quad (4{\cdot}9)$$

ஸ்டார்லிங்' சூத்திரத்தின் மீதி உறுப்பு (Remainder term in Stirling's Formula)

ஸ்டார்லிங்கின் சூத்திரத்தில் $(2n+1)$ உறுப்புகள் உள்ளன. மேலும், $P_{n+1}(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவை $f(x)$ உடன் $(2n+1)$ புள்ளிகளில் பொருந்துகிறது (coincides). $u = -n, -(n-1), -(n-2) \ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots (n-2), (n-1), n$ அல்லது,

$$x = (x_0 - nh), [x_0-(n-1)h] \dots (x_0 - h), x_0, (x_0 + h) \dots \dots [x_0 + (n-1) h], (x_0 + nh)$$

$$f(x) = P_{2n+1}(x) + K(x)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1}) \dots \dots (x - x_n)(x - x_{-n})$$

இதில், $K(x)$ஐ $f(x)$-ன் சார்பாகக் காணவேண்டும். ... (4·10)

பின்வரும் சார்பைக் கருதுக.

$$\phi(t) = f(t) - P_{2n+1}(t) - K(x)(t-x_0)(t-x_1)(t-x_{-1}) \dots \dots (t-x_n)(t-x_{-n})$$

$t = x, x_0, x_1, x_{-1}, \dots\dots, x_n, x_{-n}$ என்ற $(2n+2)$ மதிப்புகளுக்கு $\phi(t)$ மறைகிறது. எனவே, ரோல் - தேற்றப்படி $t = \xi$ என்ற ஏதோ ஒரு மதிப்புக்கு $x_{-n} < \xi < x_n$ என்ற இடைவெளிக்கு $\phi_{2n+1}(\xi) = 0$ மேலும்,

$$\phi^{2n+1}(t) = f^{2n+1}(t) - k(x)(2n+1)!$$

$$\therefore\ k(x) = \frac{f^{2n+1}(\xi)}{(2n+1)!}\ ;\ x-n < \xi < x_n$$

$k(x)$-க்கு (4·10)-ல் பிரதியிட நாம் பெறுவது

$$f(x) = P_{2n+1}(x) + f^{2n+1}(\xi)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)(x-x_{-n})}{(2n+1)!}$$

எனவே, மீதியுறுப்புப் பிழை

$$= R_n = f(x) - P_{2n+1}(x)$$

$$R_n = f^{2n+1}(\xi)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})\dots(x-x_n)(x-x_{-n})}{(2n+1)!}$$

R_nஐ u-ன் மூலம் காண மேலுள்ள மீதியுறுப்புப் பிழையில்

$$(x-x_0) = hu$$

$$(x-x_1) = h(u-1)$$

$(x-x_{-1}) = x-(x_0-h) = x-x_0-h = hu+h = h(u+1) \dots$

$(x-x_n) = h(u-n)$, $(x-x_{-n}) = h(u+n)$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$R_n = \frac{h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} u^2 (u^2-1^2)(u^2-2^2) \ldots (u^2-n^2) \; ; \; x_{-n} < \xi < x_n$$

இவ்வாறாக மீதி உறுப்புடன்கூடிய ஸ்டர்லிங்கின் சூத்திரம்

$$y_u = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^2(u^2-1^2)(u^2-2^2)\ldots(u^2-k^2)}{(2k+1)!} \mu \delta^{2k+1}_{y_0}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} u^2 (u^2-1^2)(u^2-2^2) \ldots [u^2-(k-1)^2] \, \delta^{2k}_{y_0}$$

$$+ h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi) \frac{u^2(u^2-1^2)(u^2-2^2)\ldots(u^2-n^2)}{(2n+1)!} \; ;$$

$$x_{-n} < \xi < x_n$$

'பெஸ்ஸல்' சூத்திரம் (Bessel's formula)

காஸின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$y_u = y_0 + \binom{u}{1} \Delta y_{-1} + \binom{u+1}{2} \Delta y_{-1}$$

$$+ \binom{u+1}{3} \Delta^3 y_{-2} + \binom{u+2}{4} \Delta^4 y_{-2}$$

$$+ \ldots\ldots + \binom{u+k-1}{2k-1} \Delta^{2k-1}_{y_{-k}} + \binom{u+k}{2k} \Delta^{2k}_{y_{-k}} + \ldots$$

இதில் ஆதியை ஒருமைக்கு (unity) மாற்றினால் கிடைப்பது.

$$y_u = y_1 + \binom{u-1}{1} \Delta y_0 + \binom{u}{2} \Delta^2_{y_0}$$

$$+ \binom{u}{3} \Delta^3_{y_{-1}} + \ldots\ldots \tag{4·11}$$

இப்பொழுது, காஸின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$y_u = y_0 + \binom{u}{1} \Delta y_0 + \binom{u}{2} \Delta^2_{y_{-1}}$$

$$+\binom{u+1}{3}\Delta^{3}_{y-1}+\binom{u+1}{k}\Delta^{4}_{y-2}+\ldots\ldots+\binom{x+k-1}{2k-1}$$

$$\Delta^{2k-1}_{y-k1}+\binom{x+k-1}{2k}\Delta^{2k}_{y-k}+\ldots\ldots \qquad (4\cdot12)$$

(4·11), (4·12) ஆகியவற்றுக்குச் சராசரி கண்டால்

$$y_u=\tfrac{1}{2}(y_0+y_1)+(u-\tfrac{1}{2})\Delta y_0+\frac{u(u-1)}{2!}\tfrac{1}{2}\left[\Delta^{2}_{y_{-1}}+\Delta^{2}_{y_0}\right]$$

$$+\frac{(u-\frac{1}{2})u(u-1)}{3!}\Delta^{3}{}_{y_{-1}}+\frac{(u+1)u(u+1)(u-2)}{4!}$$

$$\tfrac{1}{2}\left[\Delta^{4}_{y-1}+\Delta^{4}_{y-2}\right]$$

$$\cdots+\frac{(u+k-1)(u+k-2)\ldots(u-k)}{2k!}\tfrac{1}{2}\left[\Delta^{2k}_{y-k}+\Delta^{2k}_{y-k+1}\right]$$

$$+\frac{(u-\frac{1}{2})(u+k-1)(u+k-2)\ldots(u-k)}{(2k+1)!}\Delta^{2k+1}_{y-k}\cdots \qquad (4\cdot13)$$

இது பெஸ்ஸல் இடைச்செருகல் சூத்திரமாகும். இதில் $u=\frac{1}{2}$, $u=0$, $u=1$ என்ற புள்ளிகளுக்கு ஒற்றைப்படை வேறுபாடுகளின் கெழுக்கள் எல்லாம் பூச்சியங்களாகும். (4·13) ஐச் சமச்சீர் முறையில் வேறுவிதமாகப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$u=v+\frac{1}{2}$ என்று கருதுக.

$$y_u=y_{v+\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}(y_0+y_1)+v\Delta y_0\frac{(v^2-\frac{1}{4})}{2!}\left(\frac{\Delta^2y_{-1}+\Delta^2y_0}{2}\right)$$

$$+\frac{v(v^2-\frac{1}{4})}{3!}\Delta^3y_{-1}+\frac{(v^2-\frac{1}{4})(v^2-\frac{9}{4})}{4!}\tfrac{1}{2}(\Delta^2y_{-2}+\Delta^4y_{-1})$$

$$+(v^2-\tfrac{1}{4})(v^2-\tfrac{9}{4})\ldots\left[v^2-\frac{(2k-1)^2}{4}\right]\Delta^{2k+1}_{y-k}+\ldots\ldots(4\cdot14)$$

துணை முடிவு (Corollary)

(4·14)-ல் $u=\frac{1}{2}$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$y_{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}(y_0+y_1)-\tfrac{1}{8}\left[\frac{\Delta^2y_{-1}+\Delta^2y_0}{2}\right]+\frac{3}{128}\frac{[\Delta^4y_{-2}+\Delta^4y_{-1}]}{2}$$

$$+ \cdots + \frac{(-1)^k [1\cdot3\cdot5 \ldots (2k-1)]}{2^{2k}(2k)!} \left[\frac{\Delta^{2k}_{y-k} + \Delta^{2k}_{y-k+1}}{2}\right]$$

மைய வேறுபாட்டுக் குறியீடுகள் மூலம்

$$y_{\frac{1}{2}} = \mu y_{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{8}\mu\delta^2 y_{\frac{1}{2}} + \frac{3}{128}\mu\,\delta^4 y_{\frac{1}{2}} + \cdots$$

பெஸ்ஸல் சூத்திரத்தின் மீதியுறுப்பு (Remainder term in Bessel's formula)

பெஸ்ஸல் சூத்திரத்தில் $(2n+2)$ உறுப்புகளுள்ளன. $u = -n, -(n-1), \ldots (-1), 0, 1, \ldots (n-1), n, (n+1)$

அல்லது,

$x = (x_0 - nh), [x_0 - (n-1)h] \ldots (x_0 - h), x_0, (x_0 + h), \ldots$
$\ldots (x_0 + nh), [x_0 + (n+1)h]$ ஆகிய $(2n+2)$

புள்ளிகளில் பல்லுறுப்புக் கோவையானது கொடுக்கப்பட்ட சார்போடு பொருந்துகின்றது.

$$f(x) = P_{2n+2}(x) + K(x)(x-x_{-1})(x-x_1)\ldots(x-x_{-n})(x-x_n)(x-x_{n+1})$$

இங்கு, $K(x)$ ஐ $f(x)$-ன் சார்பாகக் காணவேண்டும்.

$\phi(t)$ என்ற பின்வரும் சார்பைக் கருதுக.

$$\phi(t) = f(t) - P_{2n+2}(t) - K(x)(t-x_0)(t-x_1)(t-x_{-1})\ldots\ldots$$
$$\ldots (t-x_n)(t-x_{-n})(t-x_{n+1})$$

$t = x, x_0, x_1, x_{-1} \ldots\ldots x_n, x_{-n}, x_{n+1}$ என்ற $(2n+3)$ புள்ளிகளில் $\phi(t)$ மறைகிறது.

$t = \xi$ என்ற ஏதோ ஒரு மதிப்புக்கு $x_{-n} < \xi < x_n$ என்ற

இடைவெளியில் $\phi^{2n+2}(t) = 0$

ஆனால், $\phi^{2n+2}(t) = f^{2n+2}(t) - K(x)(2n+1)!$

$$\therefore K(x) = \frac{f^{2n+2}(\xi)}{(2n+1)!}$$

எனவே,

$$f(x) = P_{2n+2}(x) + \frac{f^{2n+1}(\xi)}{(2n+2)!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1}) \ldots$$

$$\ldots\ldots (x-x_n)(x-x_{-n})(x-x_{n+1})$$

ஆகவே, மீதியுறுப்புப் பிழை,

$$R_n = \frac{f^{2n+2}(\xi)}{(2n+2)!}(x-x_0)\quad(x-x_1)(x-x_{-1})\quad\ldots\ldots$$

$$(x-x_n)(x-x_{-n})(x-x_{n+})$$

இதில் $(x-x_0) = hu$, $(x-x_1) = h(u-1)$, $x-x_{-1} = h(u+1)$ ... என்று பிரதியிட்டால்,

$$R_n = \frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!}f^{2n+1}(\xi)u(u-1)(u+1)\ldots(u-n)(u+n)(u-n-1)$$

மேலும் இதில் $u = v + \frac{1}{2}$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$R_n = \frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!}f^{2n+2}(\xi)(v^2-\tfrac{1}{4})(v^2-\tfrac{9}{4})\ldots$$

$$\left[v^2 - \frac{(2n+1)}{4}\right]$$

$$= \frac{\Delta^{2n+2}y_{-n-1} + \Delta^{2n+2}_{y-n}}{2(2n+2)!}(v^2-\tfrac{1}{4})(v^2-\tfrac{9}{4})\ldots$$

$$\left[v^2 - \frac{(2n+1)^2}{4}\right] \quad\ldots\ldots \qquad (4\cdot 19)$$

இலாப்லாஸ்-எவரட் சூத்திரம் (Laplace-Everett Formula)

காஸின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தில் ஒற்றைப்படை வேறுபாடுகளை (odd-differences) நீக்கிவிட்டு

$$\Delta^{2k+1}_{y-k} = \Delta^{2k}_{y1-k} - \Delta^{2k}_{y-k}$$

K = 0, 1, 2... என்ற தொடர்புகளைப் பிரதியிட்டால் காரணீயப் பெருக்கக் குறியீட்டு முறையில் பின்காணும் விரிவைப் (expansion) பெறுகிறோம்.

$$y_u = y_0 + u(y_1 - y_0) + \frac{u^{(2)}}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(u+1)^{(3)}}{3!}(\Delta^2 y_0 - \Delta^2 y_{-1})$$

$$+ \frac{(u+1)^{(4)}}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(u+k-1)^{(2k)}}{(2k)!}\Delta^{2k}_{y_{-k}}$$

$$+ \frac{(u+k)^{(2k+1)}}{(2k+1)!}(\Delta^{2k} y_{1-k} - \Delta^{2k} y_{-k}) + \dots$$

$$= (1-u)\,y_0 + uy_1 + \left[\frac{u^{(2)}}{2!} - \frac{(u+1)^{(3)}}{3!}\right]\Delta^2 y_{-1}$$

$$+ \frac{(u+1)^{(3)}}{3!}\Delta^2 y_0 + \left[\frac{(u+1)^{(4)}}{4!} - \frac{(u+2)^{(5)}}{5!}\right]\Delta^4 y_{-2}$$

$$+ \frac{(u+2)^{(5)}}{5!}\Delta^4 y_{-1} + \dots + \left[\frac{(u+k-1)^{(2k)}}{(2k)!} - \frac{(u+k)^{(2k+1)}}{(2k+1)!}\right]$$

$$+ \frac{(u+k)^{(2k+1)}}{(2k+1)!}\Delta^{2k}_{y_{1-k}} + \dots + \Delta^{2k}_{y_{-k}}$$

இதில், $u = 1 + v$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$y_u = vy_0 + \frac{v(v^2-1)}{3!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{v(v^2-1)(v^2-4)}{5!}\Delta^4 y_{-2} + \dots$$

$$\dots + \frac{(v^2-1)(v^2-4)\dots(v^2-k^2)}{(2k+1)!}\Delta^{2k}_{y_{-k}}$$

$$+ \dots + uy_1 + \frac{u(u^2-1)}{3!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u^2-1)(u^2-4)}{5!}\Delta^4 y_{-1}$$

$$+ \dots + \frac{v(v^2-1)(v^2-4)\dots(v^2-k^2)}{(2k+1)!}\Delta^{2k} y_{-k} \dots \qquad (4\cdot16)$$

இஃது 'இலாப்லாஸ்-எவரட்'டின் பொதுவான உருவமாகும்.

இரட்டைப்படை வேறுபாடுகளைக் கொண்ட அட்டவணைக்கு இச் சூத்திரத்தை எளிதில் பயன்படுத்தலாம்.

மாதிரி 1 : பின்காணும் அட்டவணையிலிருந்து $y_{0\cdot70}$-ன் மதிப்பைக் காஸின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

x	y_x
2·5	24·145
3·0	22·043
3·5	20·225
4·0	18·644
4·5	17·262
5·0	16.047

3·5 ஐ ஆதியாகக் கொள்க. இங்கு அலகு $h = 0·5$. x ஐக் கொடுக்கப்பட்ட மாறியாகவும், u-ஐப் புதிய மாறியாகவும் கொள்க.

$$\text{பின்பு} \quad u = \frac{3·75 - 3·50}{0·5} = 0·5$$

வேறுபாட்டு அட்டவணை:

u	y_u	Δy_u	$\Delta^2 y_u$	$\Delta^3 y_u$	$\Delta^4 y_u$	$\Delta^5 y_u$
−2	24·145					
		−2·102				
−1	22·043		0·284			
		−1 818		−0·047		
0	20·225		0·237		0·009	
		−1·581		−0·038		−0·003
1	18·644		0·199		0·006	
		−1·382		−0·032		
2	17·262		0·167			
		−1·215				
3	16·047					

கீழுள்ள காஸின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$y_u = y_0 + u\,\Delta y_0 + \binom{u}{2}\Delta^{2}_{y-1} + \binom{u+1}{3}\Delta^{3}_{y-1}$$

$$+ \binom{u+1}{4}\Delta^{4}_{y-2} + \dots + \binom{x+k-1}{2k-1}\Delta^{2k-1}_{y-k+1}$$

$$+ \binom{x+k-1}{2k} \Delta^{2k} y_{-k} + \cdots$$

$$y_{0\cdot5} = 20\cdot025 + 0\cdot5(-1\cdot581) + \frac{(0\cdot5)(0\cdot5-1)}{2}(0\cdot237)$$

$$+ \frac{(0\cdot5+1)(0\cdot5)(0\cdot5-1)(0\cdot5-2)}{24}(0\cdot039)$$

$$+ \frac{(0\cdot5+2)(0\cdot5+1)(0\cdot5)(0\cdot5-1)(0\cdot5-2)}{120}(-0\cdot003)$$

$$= 20\cdot225 - 0\cdot7905 - 0\cdot029625 + 0\cdot00238 + 0\cdot002375$$
$$+ 0\cdot0002106 = 19\cdot4108406$$

மாதிரி 2 : காஸின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் அட்டவணையிலிருந்து 1955ஆம் வருடத்திற்கான மக்கள் தொகையைக் காண்க.

வருடம்:	1920	1930	1940	1950	1960	1970
மக்கள் தொகை: (ஆயிரத்தில்)	12	15	20	27	39	52

1950ஐ ஆதியாகக் கொள்க. இங்கு அலகு $h = v_0$.

$$\text{எனவே புதிய மாறி } u = \frac{1955 - 1950}{10} = 0\cdot5$$

வேறுபாட்டு அட்டவணை :

u	y_u	Δy_u	$\Delta^2 y_u$	$\Delta^3 y_u$	$\Delta^4 y_u$	$\Delta^5 y_u$
−3	12					
		3				
−2	15		2			
		5		0		
−1	20		2		+3	
		7		3		−10
0	27		5		−7	
		12		−4		
1	39		1			
		13				
2	52					

காஸின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$y_u = y_0 + u\Delta y_{-1} + \frac{(u+1)u}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(u+1)\,u\,(u-1)}{6}\Delta^3 y_{-2}$$

$$+ \frac{(u+2)\,(u+1)\,u\,(u-1)}{24}\Delta^4 y_{-2} + \cdots$$

$$\therefore y_{0\cdot 5} = 27 + 0\cdot5\,(7) + \frac{(1\cdot5)\,(0\cdot5)\,5}{2} + (-1)\frac{(1\cdot5)(6\cdot5)(6\cdot5)^2}{6}(3)$$

$$+ \frac{(2\cdot5)\,(1\cdot5)\,(0\cdot5)\,(-0\cdot5)}{24}(-7)$$

$$+ \frac{(2\cdot5)\,(1\cdot5)\,(0\cdot5)\,(1\cdot5)\,(0\cdot5)}{5}(-10)$$

$$= 27 + 3\cdot5 + 1\cdot875 - 0\cdot1875 + 0\cdot2734 - 0\cdot1172$$

$$= 32\cdot3437$$

அடைப்புக்கிடையேயுள்ள உறுப்பு

$$= \frac{1}{2k}\binom{u+k-1}{2k-1}\left\{(u+k)\,\delta^{2k-1}_{u_{\frac{1}{2}}} - (u-k)\,\delta^{2k-1}_{u_{-\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$= \binom{u+k}{2k}\delta^{2k-1}_{u_{\frac{1}{2}}} - \binom{u+k-1}{2k}\delta^{2k-1}_{u_{-\frac{1}{2}}}$$

இப்பொழுது,

$$\binom{u+k-1}{2k} = \binom{-u+k}{2k}$$

எனவே, (4·17) பின்வருமாறு அமைகிறது.

$$y_u = f(x) = u_0 - \sum_{k=1}^{m}\binom{-u+k}{2k}\delta^{2k-1}_{u-\frac{1}{2}}$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\binom{u+k}{2k}\delta^{2k-1}_{u-\frac{1}{2}}$$

$$+ \binom{u+m}{2m+1}h^{2m+1}f^{2m+1}(\xi)$$

இதுவே ஸ்டிஃப்புன்ஸனின் இடைச்செருகல் சூத்திரமாகும்.

இதில்,

$$R_{2m+1}(x) = \binom{u+m}{2m+1} h^{2m+1} f^{2m+1}(\xi) \text{ ஆகும்.}$$

இச் சூத்திரம் ஒற்றைப்படை வேறுபாடுகளைக் கையாண்டு பின்வரும் வேறுபாட்டு அட்டவணையைப் பெற்றமைகிறது.

$a-h$	u_{-1}				
		$\delta u_{-\frac{1}{2}}$	$\delta^3 u_{-\frac{1}{2}}$	$\delta^5 u_{-\frac{1}{2}}$	......
a	u_0				
		$\delta u_{\frac{1}{2}}$	$\delta^3 u_{\frac{1}{2}}$	$\delta^5 u_{\frac{1}{2}}$	......
$a+h$	u_1				

மாதிரி 3 : மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் நிலையெண் என்றால்,

$y_{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_x + y_{x+1}) - \frac{1}{16}(\Delta^2 y_{x-1} + \Delta^2 y_x)$ என்பதை நிறுவுக.

'பெஸ்ஸல்' சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$y_x = \frac{y_0 + y_1}{2} + (x - \tfrac{1}{2})\,\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2!}\left[\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta y_0}{2}\right]$$

$$+ \frac{(x-\frac{1}{2})(x)(x-1)}{3!}\,\Delta^3 y_{-1}$$

இதில் $x = \frac{1}{2}$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{y_0 + y_1}{2} - \frac{1}{16}\left(\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0\right)$$

மையத்தை x-க்கு மாற்றினால்,

$$y_{x+\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(y_x + y_{x+1}) - \tfrac{1}{16}\left(\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0\right)$$

மாதிரி 4 : 5ஆம் நிலை வேறுபாடுகள் நிலையெண்ணாகவும், y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5-ன் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்,

$$y_{2\cdot 5} = \frac{c}{2} + \frac{25(c-b) + 3(a-b)}{256} \text{ என்பதைக் காட்டுக.}$$

இதில் $a = y_0 + y_5$, $b = y_1 + y_4$, $c = y_2 + y_3$

மாதிரி 5: ஸ்டர்லிங்கின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து y_{28}-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	y_x
20	49225
25	48316
30	47236
35	45926
40	44306

30ஐ ஆதியாகக் கொள்க. இதில் $h=5$

$$\text{புதிய மாறி } u = \frac{28-30}{5} = -0.4$$

வேறுபாட்டு அட்டவணை :

u	y_u	Δy_u	$\Delta^2 y_u$	$\Delta^3 y_u$	$\Delta^4 y_u$
−2	49225				
		−909			
−1	48316		−171		
		−1080		−59	
0	47236		−230		−21
		−1310		−80	
1	45926		−310		
		−1620			
2	44306				

ஸ்டர்லிங்கின் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$y_u = y_0 + \frac{u}{2}\left[\Delta y_0 + \Delta y_{-1}\right] + \frac{u^2}{2!}\Delta^2 y_{-1}$$

$$+ \frac{u(u^2-1)}{3!}\cdot\frac{1}{2}\left[\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}\right]$$

$$y_{-0.4} = 47236 - 0.4\left(\tfrac{1}{2}\right)(-1310-1080) + \frac{0.16}{2}(-230)$$

$$-\frac{(0.4)(0.16-1)}{6}\cdot\tfrac{1}{2}(-59-80) + \frac{(0.16)(0.16-1)}{24}(-21)$$

$= 47236 - 0{\cdot}2\ (-2390) - 0{\cdot}08\ (230) - (0{\cdot}1)\ (0{\cdot}28)\ (139)$
$+ (0{\cdot}02)\ (0{\cdot}84)\ (7)$

$= 47236 + 478 - 18{\cdot}40 - 3{\cdot}892 + 0{\cdot}1176$

$= 47691{\cdot}8256$

எனவே, y_{28}-ன் மதிப்பு 47691·8256.

மாதிரி 6: கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து y_9-ன் மதிப்பைப் 'பெஸ்ஸல்' சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

x :	4	8	12	16
y_x :	54	362	744	1192

வேறுபாட்டு அட்டவணை :

u	y_u	Δy_u	$\Delta^2 y_u$	$\Delta^3 y_u$
−1	54			
		308		
0	362		74	
		382		−8
1	744		66	
		448		
2	1192			

இங்கு, $h = 4$, ஆதியை 8 என்று கொண்டால் புதிய மாறி

$$u = \frac{x-8}{4} = \frac{9-8}{4} = 0{\cdot}25$$

'பெஸ்ஸல்' சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$y_u = \tfrac{1}{2}(y_0 + y_1) + (u - \tfrac{1}{2})\,\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\,\frac{[\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0]}{2}$$

$$+ \frac{(u-\frac{1}{2})\,u\,(u-1)}{3!}\,\Delta^3_{y_{-1}} + \ldots\ldots$$

$$y_{0\cdot25} = \tfrac{1}{2}(362 + 744) + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2})\,382 + \frac{\frac{1}{4}(-\frac{3}{4})}{2}\ \tfrac{1}{2}(74+66)$$

$$+ \frac{(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})\,\frac{1}{4}\,(\frac{1}{4}-1)}{6}\,(-8)$$

$= 553 - 95{\cdot}5 - 6{\cdot}5625 - 0{\cdot}0625 = 450{\cdot}975$

மாதிரி 7 : $y = 10x^5 + x^4$ என்ற சார்புக்கு x-ன் சில மதிப்புகளுக்குக் கீழே அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

$x = 2{\cdot}27$ என்றால் y ன் மதிப்பைப் பெஸ்ஸல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க. மேலும் பெஸ்ஸல் சூத்திரத்தின் மீதியுறுப்புப் பிழையைப் பெறுக.

x	y
2·0	336·0000
2·1	427·8582
2·2	538·7888
2·3	671 6184
2·4	829·4400
2·5	1015·6250

இங்கு $x_0 = 2{\cdot}2,\ x = 2{\cdot}27,\ h = 0{\cdot}1$

$$\text{ஆகவே } u = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0{\cdot}07}{0{\cdot}1} = 0{\cdot}7$$

$v = u - \frac{1}{2} = 0\ 2$ எனக் கொண்டால், பெஸ்ஸல்' சூத்திரம்

$$y_u = y_{v+\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(y_0 + y_1) + v\Delta y_0 \frac{[v^2 - \frac{1}{4}]}{2\,!} \frac{[\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0]}{2}$$

$$+ \frac{v(v^2 - \frac{1}{4})}{3\,!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(v^2 - \frac{1}{4})(v^2 - \frac{9}{4})}{4\,!}\frac{(\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1})}{2}$$

$$+ \frac{v(v^2 - \frac{1}{4})(v^2 - \frac{9}{4})\ldots\left[v^2 - \frac{(2k-1)^2}{4}\right]\Delta^{2k+1}_{v-k}}{(2k+1)\,!} + \cdots$$

$$= \frac{538{\cdot}7888 + 671{\cdot}6184}{2} + 0{\cdot}2\,(132{\cdot}8296)$$

$$+ \frac{(0{\cdot}04 - 0{\cdot}25)}{2}\,\frac{(21{\cdot}8990 + 24{\cdot}9020)}{2}$$

$$+ \frac{0{\cdot}2\,(0{\cdot}04 - 0{\cdot}25)}{6}\,(3{\cdot}0930)$$

$$= 605{\cdot}2036 + 26{\cdot}56592 - 2{\cdot}4\,178 - 0{\cdot}02165$$

$$= 629{\cdot}28609$$

$$R_n = \frac{R^4 f^4(\xi)}{4!}\left(v^2 - \tfrac{1}{4}\right)\left(v^2 - \tfrac{9}{4}\right)$$

$$f^4(\xi)\; 24 + 1200\,\xi > 2{\cdot}0\;\xi < 2{\cdot}1,\; -2{\cdot}5 < n < 2{\cdot}5$$

அல்லது $f^4(\xi) = f^4(2{\cdot}25 + {\cdot}1\eta)$

$$= 24 + 2700 + 120\eta = 2724 + 120\eta$$

எனவே, $R_n = (0{\cdot}1)^4 \dfrac{(2724 + 120\eta)}{24}(0{\cdot}04 - 0{\cdot}25)(0{\cdot}04 - 2{\cdot}25$

$$= 0{\cdot}00527 + 0{\cdot}000232\eta$$

$$R_n = 0{\cdot}00527 \pm 0.00058$$

'ஸ்டீ:பன்ஸன்' இடைச்செருகல் சூத்திரம் (Stephenson's interpolation Formula)

காஸின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = y_u = y_0 + \binom{u}{1}\Delta y_0 + \binom{u}{2}\Delta^2 y_{-1} + \binom{u+1}{3}\Delta^3 y_{-1}$$

$$+ \binom{u+1}{4}\Delta^4 y_{-2} + \cdots + \binom{x+k-1}{2k-1}\Delta^{2k-1} y_{-k+1}$$

$$+ \binom{x+k-1}{2k}\Delta^{2k} y_{-k}$$

$$= y_0 + \sum_{k=1}^{m}\left\{\binom{u+k-1}{2k-1}\Delta^{2k-1} y_{-k+1}\right.$$

$$\left. + \binom{u+k-1}{2k}\Delta^{2k} y_{-k}\right\} + R_{2m+1}$$

δ என்ற மைய வேறுபாட்டுக் குறியீடுமூலம் மேலுள்ள சூத்திரம்.

$$y_u = u_0 + \sum_{k=1}^{m} \begin{Bmatrix} u+k-1 \\ 2k-1 \end{Bmatrix} \delta^{2k-1} y_{\frac{1}{2}}$$

$$+ \begin{Bmatrix} u+k-1 \\ 2k \end{Bmatrix} \delta^{2k} y_0 + R_{2m+1}(x) \ldots\ldots \quad (4.17)$$

பெஸ்ஸல்லின் சூத்திரத்தில் $x = \frac{1}{2}$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$y_{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(y_0 + y_1) - \tfrac{1}{8}\left(\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2}\right) + \frac{3}{128}\left(\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2}\right)$$

மையத்தை 2-க்கு மாற்றினால்,

$$y_{2\cdot 5} = \tfrac{1}{2}(y_2 + y_3) - \tfrac{1}{8}\left(\frac{\Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2}{2}\right) + \frac{3}{128}\left(\frac{\Delta^4 y_0 + \Delta^4 y_1}{2}\right) \ldots (4\cdot 18)$$

இப்பொழுது, $\Delta^2 y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$

$\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$ etc.

இவற்றை (1)-ல் பிரதியிட,

$$y_{2\cdot 5} = \frac{c}{2} + \frac{3(a-c) + 25(c-b)}{256}$$

அட்கினின் நேர்க்கோட்டுத் தொடர்முறைக் கணிப்புமுறைமூலம் இடைச் செருகல் காணுதல் (Aitkin's linear iterative process)

$x_1, x_2, x_3 \ldots$ என்ற சார்புமாறிகளுக்கு $yx_1, yx_2, yx_3 \ldots$ என்பவை சார்பின் மதிப்புகள் என்க.

$f(x_1, x_2), f(x_1, x_2, x_3) \ldots$ போன்ற வகுபட்ட வேறுபாடுகளை $[x_1, x_2], [x_1, x_2, x_3] \ldots$ என்று குறிப்போம்.

மாதிரிக்காக,

$f(x; x_1, x_2, x_3)$ என்பதை இடைச்செருகலின் பல்லுறுப்புக் கோவை எனக் கொண்டால், இது y_x என்ற கொடுக்கப்பட்ட சார்போடு x_1, x_2, x_3 என்ற மதிப்புகளுக்குப் பொருந்துகிறது.

$$f(x\,;\ x_1, x_2) = y_{x_1} + (x - x_1)\ [x_1, x_2] \quad \ldots\ldots \qquad (4\cdot19)$$

$$f(x\,;\ x_1, x_2, x_3) = y_{x_1} + (x - x_1)\ [x_1 - x_2] + (x - x_1)$$
$$(x - x_2)\,[x_1, x_2, x_3] \quad \ldots\ldots \qquad (4\cdot20)$$

$$f(x\,;\ x_1, x_2, x_3, x_4) = y_{x_1} + (x - x_1)\,[x_1 .\ x_2] + (x - x_1)$$
$$(x - x_2)\ [x_1, x_2, x_3] + (x-x_1)\ (x-x_2)\ (x-x_3)\ \ [x_1, x_2, x_3, x_4]$$
$$\ldots\ldots \qquad (4\cdot21)$$

(4·20)ஐ (4·21)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$f(x\,;\ x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x\,;\ x_1, x_2, x_3) + (x-x_1)\,(x-x_2)$$
$$(x - x_3)\,[x_1, x_2, x_3, x_4]$$

சார்புமாறிகளின் வரிசையைப் பொருட்படுத்தத் தேவையில்லை என்பதால்,

$$f(x\,;\ x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x\,;\ x_1, x_2, x_3, x_4) + (x - x_1)$$
$$(x - x_2)\,(x - x_4)\,[x_1, x_2, x_3, x_4]$$

$[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]$ஐ நீக்கினுல்,

$$f(x;\ x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$= \frac{(x_4 - x)\,f(x;\ x_1, x_2, x_3) - (x_3 - x)\,f(x;\ x_1, x_2, x_3)}{(x_4 - x) - (x_3 - x)}$$

$$= \begin{vmatrix} f(x;\ x_1, x_2, x_3) & (x_3 - x) \\ f(x;\ x_1, x_2, x_4) & (x_4 - x) \end{vmatrix} \div (x_4 - x_3)$$

இவ்வாருக, விகித சமப் பகுதிகளின் விகிதப்படி, (Rule of proportional parts) $f(x;\ x_1, x_2, x_3, x_4)$ஐ $f(x;\ x_1 .\ x_2, y)$, $y = x_3$, $y = x_4$ என்று பிரதியிட்டால் பெறுகிறோம்.

இவ்விதியைப் பின்பற்றிக் கீழ்க்காணும் அட்டவணை அமைக்கிறோம்.

சார்புமாறி	சார்பு	1	2	3	பகுதிகள்
x_1	$y x_1$				$(x_1 - x)$
x_2	$y x_2$	$f(x;\ x_1, x_2)$			$(x_2 - x)$
x_3	$y x_3$	$f(x;\ x_1, x_3)$	$f(x;\ x_1, x_2, x_3)$		$(x_3 - x)$
x_4	$y x_4$	$f(x;\ x_1, x_4)$	$f(x;\ x_1, x_2, x_4)$	$f(x;\ x_1, x_2, x_3, x_4)$	$(x_4 - x)$

ஒவ்வொரு சார்பலனும் குறுக்குப் பெருக்கல் வகுத்தல் (Cross multiplication and division) மூலம் பெறப்படுகிறது.

அதாவது,

$$f(x; x_1, x_2) = \begin{vmatrix} y_{x1} & (x_1 - x) \\ y_{x2} & (x_2 - x) \end{vmatrix} \div (x_2 - x_1)$$

$$f(x; x_1, x_3) = \begin{vmatrix} y_{x1} & (x_1 - x) \\ y_{x3} & (x_3 - x) \end{vmatrix} \div (x_3 - x_1)$$

$$f(x; x_1, x_4) = \begin{vmatrix} yx_1 & (x_1 - x) \\ yx_4 & (x_4 - x) \end{vmatrix} \div (x_4 - x_1)$$

$$f(x; x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} f(x; x_1, x_2) & (x_2 - x) \\ f(x; x_1, x_3) & (x_3 - x) \end{vmatrix} \div (x_3 - x_2)$$

என்று மேன்மேலும் எழுதலாம்.

இந்தத் திட்டமே (Scheme) அட்கினின் கணிப்பு முறையை உண்டாக்குகிறது. இந்தக் கணிப்புமுறை நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்திற்குச் சமமாகும்.

இவ்வாறாக,

$$y_x = f(x; x_1, x_2, x_3, x_4) + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\, y\, \frac{\xi}{4!}$$

இதில், ξ என்பது, x_1, x_2, x_3, x_4, x ஆகியவைகள் கொண்ட மிகக் குறுகிய இடைவெளியில் அமைகிறது.

மாதிரி 7 : கீழ்க்காணும் அட்டவணை நீள்வளைய சார்பான (Elliptic function) [δ_n (x/0 2)]-ன் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அட்கினின் நேர்க்கோட்டுத் தொடர்முறைக் கணிப்பு மூலம் δ_n (0·3/0·2)-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	δ_n (x/0·2)
0 0	0·00000
0·1	0·09980
0·2	0·19841
0·4	0·38752
0·5	0·47595
0·6	0·55912

கீழ்க்காணும் அட்கின் முறையின் அட்டவணையை அமைப்போம்.

அட்கின் முறையின் அட்டவணை

சார்புமாறி x	சார்பு y_x	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	பகுதிகள்
x_1	y_{x1}						$x_1 - x$
x_2	y_{x2}	$f(x; x_1\ x_2)$					$x_2 - x$
x_3	y_{x3}	$f(x; x_1\ x_3)$	$f(x; x_1\ x_2\ x_3)$				$x_3 - x$
x_4	y_{x4}	$f(x; x_1\ x_4)$	$f(x; x_1\ x_2\ x_4)$	$f(x; x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$			$x_4 - x$
x_5	y_{x5}	$f(x; x_1\ x_5)$	$f(x; x_1\ x_2\ x_5)$	$f(x; x_1\ x_2\ x_3\ x_5)$	$f(x; x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5)$		$x_5 - x$
x_6	y_{x6}	$f(x; x_1\ x_6)$	$f(x; x_1\ x_2\ x_6)$	$f(x; x_1\ x_2\ x_3\ x_6)$	$f(x; x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_6)$	$f(x; x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6)$	$x_6 - x$

இதில், $f(x; x_1, x_2) = \begin{vmatrix} y_{x1} & (x_1 - x) \\ y_{x2} & (x_2 - x) \end{vmatrix} \div (x - x_1)$

$= \begin{vmatrix} 0{\cdot}00000 & -0{\cdot}3 \\ 0{\cdot}09980 & -0{\cdot}2 \end{vmatrix} \div 0{\cdot}1$

$= 0{\cdot}29940$

இவ்வாறே மற்ற மதிப்புகளையும் முன்பு குறிப்பிட்டுள்ள இதற்கான சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்திக் காண்கிறோம். அவைகள் கீழே அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

இங்கு, $x = 0{\cdot}3$

x	y	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	பகுதிகள்
0·0	0·00000						−0·3
0·1	0·09980	0·29940					−0·2
0·2	0·19841	0·29765	0·29583				−0·1
0·4	0 38752	0·29064	0·20356	0·294695			0·1
0·5	0·47595	0·28557	0·292485	0·294715	0·294675		0·2
0·6	0·55912	0·27956	0·291464	0·2947385	0·294673	0·294679	0·3

இவ்வட்டவணையிலிருந்து, $y_{3 \cdot 0} = 0{\cdot}294679$ (ஆறு தசமத்தானத்திற்குத் திருத்தமாக)

'நீ-வில்லி'யின் தொடர்முறைக் கணிப்பு (Ne-Ville's iterative proces.)

'நீ-வில்லி'யின் முறை, அட்கினின் முறையினின்று சற்று வேறுபட்டுள்ளது. கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாறியின் மதிப்புகளின் மையத்தில், இடைச்செருகவேண்டிய மதிப்பு இருந்தால் இந்த முறை மிகவும் பயன்படுகிறது.

அட்கின் முறையில் கையாண்ட குறியீடுகள் மூலம் 'நீ-வில்லி'யின் அட்டவணை பின்வருமாறு :

சார்பு மாறி x	பகுதிகள்	சார்பு yx	(1)	(2)	(3)	(4)
x_1	$x-x_1$	yx_1				
			$f(x; x_1, x_2)$			
x_2	$x-x_2$	yx_2		$f(x; x_1, x_2, x_3)$		
			$f(x; x_2, x_3)$		$f(x; x_1, x_2, x_3, x_4)$	
x_3	$x-x_3$	yx_3		$f(x; x_2, x_3, x_4)$		$f(x; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$
			$f(x; x_3, x_4)$		$f(x; x_2, x_3, x_4, x_5)$	
x_4	$x-x_4$	yx_4		$f(x; x_3, x_4, x_5)$		
			$f(x; x_4, x_5)$			
x_5	$x-x_5$	yx_5				

அட்கின் முறையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூத்திரங்களே இங்கேயும் பயன்படுத்துகிறோம்.

$f(x; x_1, x_2, x_3)$ ஐ எளிதாகப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$f(x; x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} (x-x_1) & f(x; x_1, x_2) \\ (x-x_3) & f(x; x_2, x_3) \end{vmatrix} \div (x_3 - x_1)$$

மாதிரி : 'நீ-வில்லி'யின் தொடர்முறை கணிப்பின்மூலம் கீழ்க் காணும் அட்டவணையிலிருந்து sin (0·25)-க்கான மதிப்பைக் காண்க.

x	$\sin x$
0·1	0·0998
0.2	0·1987
0·3	0·2955
0·4	0·3894

இப்பொழுது 'நீ-வில்லி'யின் தொடர்முறை அட்டவணையை முன்பு குறித்துள்ள சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி அமைப்போம். இதில் $x = 0·25$

'நீ-வில்லி'யின் தொடர்முறை அட்டவணை

மாறி x	பகுதிகள்	சார்பு	(1)	(2)	(3)
$x_1 = 0·1$	$x - x_1 = 0·15$	0·0998			
			0·24815		
$x_2 = 0·2$	$x - x_2 = 0·05$	0·1987		0·24736	
			0·2471		0·24741
$x_3 = 0·3$	$x - x_3 = -0·05$	0·2955		0·24746	
			0·24855		
$x_4 = 0·4$	$x - x_4 = -0·15$	0·3894			

உதாரணமாக, இவ்வட்டவணையில்,

$$0·24815 = f(x; x_1, x_2) = \begin{vmatrix} y_{x_1} & (x_1 - x) \\ y_{x_2} & (x_2 - x) \end{vmatrix} \div (x_2 - x_1)$$

$$= \begin{vmatrix} 0·0998 & (0·1 - 0·25) \\ 0·1987 & (0·2 - 0·25) \end{vmatrix} \div (0·2 - 0·1)$$

$$= \begin{vmatrix} 0·0998 & -0·15 \\ 0·1987 & -0·05 \end{vmatrix} \div 0·1$$

இவ்வாறே மற்ற மதிப்புகளை மேலுள்ள அட்டவணையில் குறிப்பிட்டுள்ளோம்.

மேலுள்ள அட்டவணையிலிருந்து sin (0·25) = 0·24741 என அறிகிறோம்.

பயிற்சி 4

1. μ, δ, ∇, E, Δ ஆகிய செயலிகளை வரையறைக. அவற்றுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகளையும் விளக்குக.

2. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\delta^n y_x = \Delta^n y_{x-\frac{n}{2}} = \Delta^n y_{x+\frac{n}{2}}$

(ii) $\mu^2 y_x = y_x + \frac{1}{4}\delta^2 y_x$

(iii) $E^{\frac{1}{2}} y_x = \mu y_x + \frac{1}{2}\delta y_x$

3. நிறுவுக.

(i) $\delta^2 y_0 = y_1 - 2y_0 + y_{-1}$

(ii) $\delta^3 y_{\frac{1}{2}} = y_2 - 3y_1 + 3y_0 - y_{-1}$

4. மூன்றாம் நிலை வேறுபாடுகள் நிலையெண் என்றால்,

$$y_x = xy_1 + \frac{x(x^2-1)}{3!}\Delta^3 y_0 + uy_0 + \frac{u(u^2-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}$$

என்பதை நிறுவுக.

இதில், u 1 x. இதனைப் பயன்படுத்தி y_{11}, y_{16} ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கீழுள்ள அட்டவணையிலிருந்து பெறுக.

$y_0 = 3100$, $y_5 = 2710$, $y_{10} = 2285$

$y_{15} = 1860$, $y_{20} = 1560$, $y_{25} = 1510$

$y_{30} = 1835$.

5. 'காஸ்'ஸின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து $x = 30$ க்கான $f(x)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	$f(x)$
21	18·4708
25	17·8144
29	17·1070
33	16·3432
37	15 5154

6. 'காஸ்'ஸின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளிலிருந்து $y_{0\cdot5}$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$y_2 = 10, \quad y_1 = 8, \quad y_0 = 5. \quad y_{-1} = 10$$

7. கீழ்க்காணும் அட்டவணை $y = \sqrt{x}$ என்ற சார்பைக் குறிக்கிறது.

x	$y = \sqrt{x}$
12500	111·8033
12510	111·8928
12520	111·8481
12530	111·9375

$x = 12516$-க்கான y-ன் மதிப்பைக் 'காஸ்'ஸின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

8, கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து $f(25)$-க்கான மதிப்பைப் 'பெஸ்ஸல்'லின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

x	$f(x)$
20	14
24	32
28	35
32	40

9. பின்வரும் அட்டவணையில் $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

என்ற இயல்நிலைப் பரவலுக்கு $t = 0{\cdot}5,\ 1{\cdot}0,\ 1{\cdot}5,\ 2{\cdot}0,\ 2{\cdot}5,\ 3{\cdot}0$ ஆகியவற்றுக்கான $f(t)$ ன் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

t	$f(t)$
0·5	0·19.46
1·0	0·34134
1·5	0·43319
2·0	0·47725
2·5	0·49379
3·0	0·49865

$f(0{\cdot}44)$-ன் மதிப்பை (a) 'பெஸ்ஸல்'-ன் சூத்திரத்தையும், (b) 'ஸ்டர்லிங்'-ன் சூத்திரத்தையும் பயன்படுத்திக் காண்க.

10. 'இலாப்லாஸ் எவரட்'டின் சூத்திரத்தையும், 'ஸ்டர்லிங்'கின் சூத்திரத்தையும் பயன்படுத்தி, மகை (337·5)-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	மகை$_{10}$ x
310	2·49136
320	2·50515
330	2·51851
340	2·53147
350	2·54407
360	2·55630

5. எதிர் மாற்ற இடைச்செருகலும், சமன்பாடுகளின் தீர்வும்

(Inverse interpolation and Solution of Equations)

முன்பு கண்ட நேரடி இடைச்செருகல் (Direct interpolation) முறையில் சார்பு மாறி x-ன் மதிப்புகளுக்குரிய சார்பலன் $f(x)$-ன் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் x-ன் இரு மதிப்புகளுக்கிடைப் பட்ட ஒரு மதிப்பிற்குரிய $f(x)$-ன் மதிப்பைக் காண்கிறோம். ஆனால், எதிர் மாற்ற இடைச்செருகல் (inverse interpolation) முறையில், சார்பு $f(x)$-ன் இரு மதிப்புகளுக்கிடைப்பட்ட ஒரு மதிப்பிற்குச் சார்பு மாறி x-ன் மதிப்பைக் காண விழைகிறோம்.

எதிர்மாற்ற இடைச் செருகலுக்குப், பின்வரும் மூன்று வழி முறைகளைப் (method) பயன்படுத்துகிறோம்.

(i) 'இலக்ராஞ்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தும் முறை.

(ii) அடுத்தடுத்த தோராய மதிப்பு முறை (Successive Approximation Method)

(iii) தொடர்களை முன் பின்னாக்கும் முறை (Reversion of Series Method)

5-A 'இலக்ராஞ்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி எதிர்மாற்ற இடைச்செருகல் செய்யும் முறையை ஓர் உதாரணம் மூலம் காண்போம்.

மாதிரி : 'இலக்ராஞ்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தை எதிர்மாறாகப் பயன் படுத்தி $f(x) = 23{\cdot}6$-க்கேற்ற, மாறி x ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	$f(x)$
40	25·9
45	24·9
50	24·1
55	23·3
60	22·5

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலுள்ள மதிப்புகளைக்கொண்டு $x = x$ எனும் மதிப்புக்கு இணையான $f(x')$ இடைச்செருகல் மதிப்பைப் பெற 'இலக்ராஞ்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம். இப்பொழுது $f(40)$, $f(45)$, $f(50)$, $f(55)$, $f(60)$ ஆகிய மதிப்புகளைக் கொண்டு $f(x) = 23\cdot6$ என்னும்போது, x-ன் மதிப்பைப் பெறவேண்டுமெனில், z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 ஆகியவற்றை $z_D = f(40)$, $z_1 = f(45)$, $z_2 = f(50)$, $z_3 = f(55)$, $z_4 = f(60)$ என அமைத்துக்கொண்டு z_D-க்கு இணையான சார்பு மதிப்பு $\phi(z_D) = (40)$, z_1-க்கு இணையான சார்பு மதிப்பு $\phi(z_1) = 45$, z_2-க்கு இணையான சார்பு மதிப்பு $\phi(z_2) = 50$, z_3-க்கு இணையான சார்பு மதிப்பு $\phi(z_3) = 55$, z_4-க்கு இணையான சார்பு மதிப்பு $\phi(z_4) = 60$ எனக் கொள்வோம். எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளை z, $\phi(z)$ ஆகியவை வாயிலாகக் குறிப்பிட்டு $z' = 23\cdot6$ என்பதற்கு இணையான இடைச்செருகல் $\phi(23\cdot6)$-ன் மதிப்பை 'இலக்ராஞ்ஜ்'-ன் சூத்திரம் வாயிலாக,

$$\phi(z') \quad \sum_{r=0}^{n'} \frac{(z'-z_0)(z'-z_1)\ldots\ldots(z-z'_n)^{-}\phi(z_r)}{(z_r-z_0)(z_r-z_1)\ldots\ldots(z_r-z_n)}$$

$$\Rightarrow x' = \sum_{r=0}^{u'} \frac{[f(x')-f(x_0)][f(x')-f(x_1)]\ldots[f(x'-f(x_n)]x_r}{[f(x_r)\ \ f(x_0)][f(x_r)-f(x_1)]\ldots[f(x_r)-f(x_n)]}$$

என அமையும்போது,

$f(x') = 23\cdot6$-க்கு,

$$x' = \frac{(23\cdot6-24\cdot9)(23\cdot6-24\cdot1)(23\cdot6-23\cdot3)(23\cdot6-22\cdot5)}{(25\cdot9-24\cdot9)(25\cdot9-24\cdot1)(25\cdot9-23\cdot3)(25\cdot9-22\cdot5)}$$

$$+\frac{(23\cdot6-25\cdot9)(23\cdot6-24\cdot1)(23\cdot6-23\cdot3)(23\cdot6-22\cdot5)(45)}{(24\cdot9-25\cdot9)(24\cdot9-24\cdot1)(24\cdot9-23\cdot3)(24\cdot9-22\cdot5)}$$

$$+\ldots+\frac{(23\cdot6-25\cdot9)(23\cdot6-24\cdot9)(23\cdot6-24\cdot1)(23\cdot6-23\cdot3)(60)}{(22\cdot5-25\cdot9)(22\cdot5-24\cdot9)(22\cdot5-24\cdot1)(22\cdot5-23\cdot3)}$$

$= 50\cdot1$

5-B அடுத்தடுத்த தோராய மதிப்புமுறை (Successive approximation Method)

$y = f(x)$-ஐ, n ஆம்படி பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் கொள்க.

நியூட்டனின் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$y = y_0 + \binom{x}{1} \Delta y_0 + \binom{x}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{x}{3} \Delta^3 y_0 + \ldots \quad (5.1)$$

y-ன் மதிப்புக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், மேலுள்ள சமன்பாட்டிலிருந்து மெய் தீர்வைக் (real root) காண வேண்டும். இந்தச் சமன்பாட்டிற்கு அடுத்தடுத்த தோராய மதிப்பு மூலம் தீர்வு காண முடியும்.

இடமாற்றம் செய்து (Transposing), Δy_0 ஆல் வகுத்தால்,

$$x = \frac{(y-y_0)}{\Delta y_0} - \frac{x(x-1)}{2!\,\Delta y_0} \Delta^2 y_0 - \frac{x(x-1)(x-2)}{3!\,\Delta y_0} \Delta^3 y_0$$

$$- \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!\,\Delta y_0} \Delta^4 y_0 \ldots \quad (5.2)$$

என உயர்நிலை வேறுபாடுகளைப் புறக்கணித்தால் பெறுகிறோம்.

x-க்கு, முதல் தோராய மதிப்பைக் காண முதல்நிலை வேறுபாடுகளுக்கு மேற்பட்ட வேறுபாடுகளைப் புறக்கணிக்கிறோம். அவ்வாறு செய்தால் $x_1 = \frac{y-y_0}{\Delta y_0}$ என்று கிடைக்கிறது. இதனை x-க்கு (5.2) ல் பிரதியிட்டால் x_2 என்ற தோராய மதிப்புக் கிடைக்கிறது.

அதாவது,

$$x_2 = \frac{y-y_0}{\Delta y_0} - \frac{x_1(x_1-1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \frac{x_1(x_1-1)(x_1-2)}{3!} \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta y_0}$$

$$- \frac{x_1(x_1-1)(x_1-2)(x_1-3)}{4!} \frac{\Delta^4 y_0}{\Delta y_0}$$

x_3 என்ற மூன்றும் தோராய மதிப்பைப் பெற x_2-ஐ, x க்கு (5.2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$x = \frac{y-y_0}{\Delta y_0} - \frac{x_2(x_2-1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \frac{x_2(x_2-1)(x_2-2)}{3!} \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta y_0}$$

$$- \frac{x_2(x_2-1)(x_2-2)(x_2-3)}{4!} \frac{\Delta^4 y_0}{\Delta y_0}$$

என்று பெறலாம். இவ்வாறு மேலும் மேலும் தோராய மதிப்புகளைத் தொடர்முறை கணிப்பு (iterative process) மூலம் காண முடியும்.

மாதிரி : அடுத்தடுத்த தோராய மதிப்பு முறையின்மூலம் 'பெஸ்ஸல்'லின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, $f(x) = 85{\cdot}189375$ க்கான x ன் மதிப்பைக் கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து காண்க.

x	$f(x)$
10	51·21
12	60·24
14	75·32
16	96·02
18	119·78
20	151·45

தேவையான x-ன் மதிப்பு 14 க்கும், 15-க்குமிடையே அமைவதால் ஆதியை 14-ல் கொண்டு, வேறுபாட்டு அட்டவணையை அமைக்கிறோம். இங்கு $h = 2$, $f(x) = 85{\cdot}189375$

வேறுபாட்டு அட்டவணை

u	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
−2	10	51·21					
			9·03				
−1	12	60·24		6·05			
			15·08		−0·43		
0	14	75·32		5·62		−2·13	
			20·70		−2·56		9·54
1	16	96·02		3·06		−7·41	
			23·76		4·85		
2	18	119·78		7·91			
			31·67				
3	20	151·45					

'பெஸ்ஸல்'லின் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + u\Delta y_0 + (u^2 - \tfrac{1}{4})\frac{[\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0]}{2}$$

$$+ \frac{u(u^2 - \frac{1}{4})}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \dots$$

இதில், $x = x_0 + h(u + \frac{1}{2})$ என்பதை அறிக.

$\therefore f(x) = 85.189375$ என்பதால்,

$$85.189375 = \frac{75.32 + 96.02}{2} + (20.70)u + \frac{(u^2 - \frac{1}{4})}{2}[5.62 + 3.06]$$

$$+ \frac{u(u^2 - \frac{1}{4})}{6}(-2.56)$$

$$= 85.67 + (20.70)u + \frac{(u^2 - 0.25)}{2}(8.68)$$

$$- \frac{(u^3 - 0.25u)}{6}(2.56)$$

இடமாற்றம் செய்து, 20.70ஆல் வகுத்தால்,

$$u = \frac{(85.189375 - 85.67)}{20.70} - \frac{(u^2 - 0.25)}{20.70}4.34 + \frac{(u^3 - 0.25u)}{20.70}(0.4266)$$

$$= -0.0236 - (u^2 - 0.25)\frac{(4.34)}{20.70} + \frac{(u^3 - 0.25u)}{20.70}(0.4266)$$

முதல் உறுப்பைத் தவிர மற்ற உறுப்புகளைப் புறக்கணித்தால், u_1 என்ற தோராய மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

இங்கு, $u_1 = -0.0236$

இதை மேலுள்ள சமன்பாட்டில் u-க்குப் பிரதியிட்டால், இரண்டாம் தோராய மதிப்பு,

$$u_2 = -0.00013$$

இதனை மேலுள்ள சமன்பாட்டில் u-க்குப் பிரதியிட்டால், மூன்றாம் தோராய மதிப்பான,

$u_3 = -\ 0{\cdot}00001$ ஐப் பெறுகிறோம்.

$$\therefore\ x = x_0 + h\left(u + \tfrac{1}{2}\right)$$
$$= 14 + 2\,(-\ 0{\cdot}00001 + 0{\cdot}5)$$
$$= 14 + 2\,(0{\cdot}49999)$$
$$x = 14{\cdot}99998$$

மாதிரி : $x^3 + x - 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் 1·2 க்கும் 1·3-க்கு மிடையே அமையும் மெய்த் தீர்வைக் காண்க.

x-ன் மதிப்பை 1.0, 1·1, 1·2, 1·3, 1·4 எனக் கொண்டு $f(x)$-ன் மதிப்புகளைப் பின்வருமாறு அட்டவணைப் படுத்துகிறோம்.

x	$y = x^3 + x - 3$
1·0	– 1
1·1	– 0·569
1·2	– 0·072
1·3	0·497
1·4	1·144

இப்பொழுது, வேறுபாட்டு அட்டவணையை அமைப்போம்.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1	– 1				
		0·431			
1·1	– 0·569		0·066		
		0·497		0·006	
1·2	- 0·072		0·072		0
		0·569		0·006	
1·3	0·497		0·078		
		0·647			
1·4	1·144				

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மெய்த் தீர்வு $= 1{\cdot}2 + (0{\cdot}1)\,x$, ஆதியை 1·2-ல் கொள்க.

இங்கு, $h = 0{\cdot}1$

இப்பொழுது, 'ஸ்டர்லிங்'கின் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = y_0 + x\frac{[\Delta y_0 + \Delta y_{-1}]}{2} + \frac{x^2}{2}\Delta^2 y_{-1}$$

$$+ \frac{x(x^2-1)}{6}\frac{[\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}]}{2}$$

$$0 = -0{\cdot}072 + \frac{x(0{\cdot}569 + 0{\cdot}497)}{2} + \frac{x^2}{2}(0{\cdot}072)$$

$$+ \frac{x(x^2-1)}{6}\frac{(0{\cdot}006)}{}$$

$$= -0{\cdot}072 + 0{\cdot}531x + 0{\cdot}0036x^2 + 0{\cdot}001x^3$$

மேலுள்ள சமன்பாட்டை,

$$x = \frac{0{\cdot}072}{0{\cdot}531} - \frac{0{\cdot}0036}{0{\cdot}531}x^2 - \frac{0{\cdot}001}{0{\cdot}531}x^3$$ என்று எழுதலாம்.

$$\text{முதல் தோராயம் } x_1 = \frac{0.072}{0{\cdot}531} = 0{\cdot}1353$$

இதை மேலுள்ள சமன்பாட்டில் x-க்குப் பிரதியிட இரண்டாம் நிலை தோராயம்

$$x_{(2)} = 0{\cdot}1353 - 0{\cdot}067(0{\cdot}1353)^2 - \frac{0{\cdot}001}{0{\cdot}531}(0{\cdot}1353)^3$$

$$= 0.1353 - 0{\cdot}001211075 - 0{\cdot}0003428675$$

$$= 0{\cdot}1338539425$$

$\therefore$ மெய்த் தீர்வு $= 1{\cdot}2 + (0{\cdot}1)(0{\cdot}13385)$

மாதிரி 4 :

$x^3 + x - 5$ என்ற சமன்பாட்டிற்குரிய மெய்த் தீர்வைக் காண்க.

$f(x) = x^3 + x - 5 = 0$ என்க.

$f(x)$-ன் மெய்த் தீர்வு 1 5-க்கும் $1{\cdot}6$-க்குமிடையேயுள்ளதென்பதைப் பட்டறி முறையால் (trial and error method) அறிகிறோம்.

இப்பொழுது $x = 1{\cdot}5,\ 1{\cdot}6,\ 1{\cdot}7,\ 1{\cdot}8$ என்பதற்கான $f(x)$-ன் மதிப்புகளை அட்டவணைப் படுத்துவோம்.

x	$f(x)$
1·5	−0·125
1·6	0·696
1·7	1·613
1·8	2·632

$x_0 = 1{\cdot}5$ ஆரம்பம் என்றும் h என்ற அலகை 0 1 என்றும் மாற்றப்பட்டால் $x = x_0 + hu$

மெய்த் தீர்வு $= 1{\cdot}5 + hu$

$$= 1{\cdot}5 + (0{\cdot}1)\,u$$

வேறுபாடுகளின் அட்டவணை.

u	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	1·5	−0·125			
			0·82		
1	1·6	0·696		0·096	
			0·917		0·006
2	1·7	1·613		0·102	
			1·0 9		
3	1·8	2·632			

1·5 ஆரம்பத்திலுள்ளமையால் நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தைக் கருதுக,

$$f(x_0 + hu) = f(x_0) + \binom{u}{1}\Delta f(x_0) + \binom{u}{2}\Delta^2 f(x_0) + \dots\dots\dots$$

$$0 = -0{\cdot}125 + \binom{u}{1}(0{\cdot}821) + \binom{u}{2}(0{\cdot}096) + \dots\dots\dots \quad \dots\dots \qquad (1)$$

u-க்கு முதல் தோராய மதிப்பு

$$u_1 = \frac{0{\cdot}125}{0{\cdot}821} = 0{\cdot}152$$

இதனை (1)ஆல் u க்குப் பிரதியிட்டால்,

$$0 = -0{\cdot}125 + u\left[0{\cdot}821 + \frac{(0{\cdot}1602-1)}{2}(0{\cdot}096)\right]$$

$$= -0{\cdot}125 + 0{\cdot}7803\,u$$

$\therefore u_{(2)} = \dfrac{0\ 125}{0\ 7803} = 0{\cdot}1602$ என இரண்டாம் தோராய மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

$u_{(2)}$-ன் மதிப்பை (1)ஆல் u-க்குப் பிரதியிட்டால் மூன்றும் தோராய மதிப்பான $u_{(3)}$-ஐ

$$0 = -0{\cdot}125 + u\left[0{\cdot}821 + \frac{(0{\cdot}1602)}{2}(0{\cdot}096) + (0{\cdot}1602-1)\right.$$

$$\left.\times\frac{(0{\cdot}1602-2)}{3!}(0{\cdot}006)\right]$$

-லிருந்து $u_{(3)} = \dfrac{0\ 125}{0\ 8.98} = 0{\cdot}1454$ எனக் காண்கிறோம்.

எனவே, மெய்த் தீர்வு $= 1{\cdot}5 + (0{\cdot}1454)\,(0{\cdot}1)$

$= 1{\cdot}51454$

மாதிரி 5 : கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் $y = f(x) = \sin hx$ என்ற சார்புக்கு 0·1 என்ற இடைவெளியில் $x = 4{\cdot}80$-லிருந்து $x = 4{\cdot}84$ வரை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\sin hx = 62$ என்றால் x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	$y = \sin hx$
4·80	60·7511
4·81	61·3617
4 82	6[illegible]785
4·83	62 6015
4 84	63 2307

$\sin hx = 62$ என்னும் மதிப்பு 4·82-க்கும் 4·83-க்குமிடையே அமைவதால் ஆதியை 4.82-ல் கொண்டு வேறுபாட்டு அட்டவணையை அமைப்போம்.

அதனால் $x_0 = 4·82,\ h = 0·01$,

x	u	$y = \sin hx$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
4·80	−2	60·7511				
			0·6106			
4·81	−1	61·3617		0·0062		
			0·6168		0	
4·82	0	61·9785		0·0062		0
			0·6230		0	
4·83	1	62·6015		0·0062		
			0·6292			
4·84	2	63·2307				

மேலுள்ள வேறுபாட்டு அட்டவணையில் இரண்டாம் நிலை வேறுபாடுகள் நிலையெண்ணாக இருப்பதையும், அதற்கு மேற்பட்ட நிலை வேறுபாடுகள் பூச்சியமாய் இருப்பதையும் காண்கிறோம். எனவே, 'ஸ்டர்லிங்'கின் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = y_0 + x\,\frac{(\Delta y_0 + \Delta y_{-1})}{2} + \frac{x^2}{2!}\,\Delta^2 y_{-1} + \ldots\ldots\ldots$$

$$62 = 61·9785 + x\,\frac{(0·6230 + 0·6168)}{2} + \frac{x^2}{2!}\,(0·0062)$$

இஃது இருபடிச்சமன்பாடு (quadratic equation) என்பதால் அடுத்தடுத்த தோராய மதிப்பு முறை தேவையற்றதாகிறது.

மேலுள்ள சமன்பாடு :

$$31x^2 + 6199x - 215 = 0$$ என ஆகிறது.

தீர்வு கண்டால் $x = 0·0347$ என்ற மெய்த்தீர்வு கிடைக்கிறது.

$$\therefore x_1 = x_0 + hx = 4·82 + (0·01)(0·0347)$$
$$= 4·8203$$

எனவே, $\sin hx = 62$-க்கான x-ன் மதிப்பு 4·8203 ஆகும்.

தொடர்களை முன் பின்னாக்கும் முறை (Reversion of Series Method)

இதுவரை நாம் கண்ட y-ன் அமைப்பிலுள்ள இடைச் செருகல் சூத்திரங்கள் x-ன் அடுக்குத் தொடராக (Power Series) இருக்கின்றன.

எனவே, $y = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \ldots\ldots\ldots$ (1)

$l = \dfrac{y - p_0}{p_1}$ என்றும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள அடுக்குத் தொடர்

ஒருங்கும் (Convergent) அடுக்குத்தொடர் என்றும் கொள்க. இதனால் x-ன் அடுக்குத் தொடராக விரிக்கலாம்.

$$x = m_1 l + m_2 l^2 + m_3 l^3 + m_4 l^4 + \dots\dots\dots\dots$$

மேலுள்ள கோவையை (expression)யை x-க்கும், $(y-p_0)$-க்கு $y_1 l$ஐயும் (1)ஆல் பிரதியிட்டு l-ன் சமநிலை கெழுக்களை (coefficient of like powers) சமன்படுத்தினால் (equating),

$$m_1 = 1$$

$$m_2 = \frac{-p_2}{p_1}$$

$$m_3 = \frac{-p_3}{p_1} + 2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2$$

$$m_4 = \frac{-p_4}{p_1} + 5\frac{p_2 p_3}{p_1^4} - 5\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^3 \dots\dots\dots$$

நான்காம்நிலை வேறுபாடுகள் நிலையெண் ஒன்று கொண்ட கிரிகோரி-நியூட்டனின் சூத்திரத்தைக் கருதினால்,

$$y = y_0 + x\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

$$= p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4$$

x-ன் சமநிலைக் கெழுக்களைச் சமன்படுத்தினால்,

$$p_0 = y_0$$

$$p_1 = \Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4}$$

$$p_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{2} + \frac{11\Delta^4 y_0}{24}$$

$$p_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{6} - \frac{\Delta^4 y_0}{4}$$

$$p_4 = \frac{\Delta^4 y_0}{24}$$

குறிப்பு : p-ன் மதிப்புகளை 'ஸ்டர்லிங்'கின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தியும் காணலாம். 'ஸ்டர்லிங்'கின் சூத்திரத்தில் 5ஆம் நிலை வேறுபாடுகளையும் அதன் உயர்நிலை வேறுபாடுகளையும் புறக்கணித்தால்,

$$y = y_0 + x\left(\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2}\right) + \frac{x^2}{2!}\Delta^2 y_{-1}$$

$$+ \frac{x(x^2-1)}{3!}\left(\frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2}\right)$$

$$+ \frac{x^2(x^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2}$$

$$= y_0 + \left[\left(\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2}\right) - \left(\frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{12}\right)\right] x$$

$$+ \left[\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2} - \frac{\Delta^4 y_{-2}}{24}\right] x^2$$

$$+ \left[\frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{12}\right] x^3 + \frac{\Delta^4 y_{-2}}{24} x^4$$

$$= p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4$$

இரு புறத்திலும் x-ன் சமநிலைக் கெழுக்களைச் சமன்படுத்தினால்,

$$p_0 = y_0$$

$$p_1 = \left(\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2}\right) - \left(\frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{12}\right)$$

$$p_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2} - \frac{\Delta^4 y_{-1}}{24}$$

$$p_3 = \left(\frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{12}\right)$$

$$p_4 = \frac{\Delta^4 y_{-2}}{24}$$ எனப் பெறுகிறோம்.

மாதிரி 6 : $\cos hx = 1{\cdot}285$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தொடர்களை முன்னுக்குப் பின்னாக்கும் (Reversion of series Method) முறையில், ஸ்டர்லிங்கின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து x-ன் மதிப்பைப் பெறுக.

x	$y = \cos hx$
0·736	1·2832974
0·737	1·284[illegible]23
0·738	1·2849[illegible]85
0·73[illegible]	1·2857159
0·740	1·2865247
0·741	1·2873348

கொடுக்கப்பட்டுள்ள y-ன் மதிப்பான 1·285-க்கான x-ன் மதிப்பு 0·738-க்கும் 0·739-க்குமிடையே அமைவதால், ஆதியை 0·738-ல் கொண்டு u என்னும் புது மாறிக்குப் பின்வரும் வேறுபாட்டு அட்டவணையை அமைக்கிறோம்.

u	x	$y = \cos hx$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
−2	0·736	1·2832974					
			0·0008049				
−1	0·737	1·2841023		0·0000013			
			0·0008062		−0·0000001		
0	0·738	1·2849085		0·0000012		0·0000003	
			0·0008074		0·0000002		−0·0000006
1	0·739	1·2857159		0·0000014		−0·0000003	
			0·0008088		0·0000001		
2	0·740	1·2865247		0·0000013			
			0·0008108				
3	0·741	1·2873348					

$$y = 1·285, \quad h = 0·001, \quad x_0 = 0·738$$

இங்கு,
$$p_0 = 1.2849085$$
$$p_1 = 1.2857159$$
$$p_2 = 1.286524$$
$$p_3 = 1.2873348$$
$$p_4 = 0$$

$$\therefore \quad l = \frac{y - p_0}{p_1} = \frac{1.285 - 1.2849085}{1.2857159} = 0.00071$$

$$\therefore \quad m_2 = \frac{-p_2}{p_1} = \frac{-1.2865247}{1.2857159} = -1.0006$$

$$m_3 = \frac{-p_3}{p_1} + 2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2$$

$$= \frac{-1.2873348}{1.2857159} + 2\left(\frac{1.2865247}{1.2857159}\right)^2$$

$$= 1.0018$$

$$m_4 = 0$$

$$\therefore \quad x = l + m_2 e^2 + m_3 e^3 + m_4 e^4$$
$$x = .0007095$$

$$\therefore \quad x = x_0 + hx$$
$$= 0.738 + (0.001) \times .007095$$
$$= 0.7380007095$$

சமன்பாடுகளின் தீர்வு

சமன்பாடுகளின் தீர்வைக் காண்பதற்குப் பலவழிமுறைகளுள்ளன. nஆம்படி சமன்பாட்டிற்கு n தீர்வுகள் இருக்கும். ஆனால், அவற்றில் சில மெய்த் தீர்வுகளாகவும் (real roots), சில கற்பனைத் தீர்வுகளாகவும் (imaginary roots) இருக்கும். ஒரு மாறியில் அமைந்த nஆம்படி சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை அதன் குணகங்களைப் பயன்படுத்திக் காணமுடியும். மாறிகளின் எண்ணிக்கை சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கைக்கும் அதிகமாக இருப்பின் முடிவிலா எண்ணிக்கையுள்ள தீர்வுகள் இருக்கும். மாறிகளின் எண்ணிக்கை சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கைக்கு குறைவாக இருந்

தால் குறைந்தது ஒரு தீர்வாவது இருக்கும். எப்படி இருப்பினும் மேற்சொன்ன சமன்பாடுகளுக்கு எளிதில் தீர்வு காணமுடியும். ஆனால் படந்த சார்பு அல்லது அதீத சார்பு (Transcedental function) களுக்குத் தீர்வு காண்பது எளிதன்று. மாதிரியாகச் சில சார்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) $2 \log x = 1 + 3 \cot x$

(ii) $\cos\left(\dfrac{0{\cdot}78.4 - x\sqrt{x^2-1}}{1-2x^2}\right) = x$

(iii) $1 - x + \dfrac{x^2}{(2!)^2} - \dfrac{x^3}{(3!)^2} + \dfrac{x^3}{(4!)^2} + \dots = 0$

இம் மாதிரியான சமன்பாடுகளுக்குப் பின்வரும் முறைகள் மூலம் தீர்வு காணமுடியும்.

1. எதிர்மாறு இடைச்செருகல் முறை (Inverse interpolation)
2. வரைபட முறை (Graphical method)
3. நேமவரை முறை (Nomogram)
4. எண்சார் முறை (Numerical methods)

எதிர்மாறு இடைச் செருகல் முறையை நாம் முன்பே கண்டோம். இப்பொழுது எண்சார் முறைமூலம் எவ்வாறு தீர்வு காண்பதென்பதை மட்டும் காண்போம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளுக்கேற்ப எண்சார் முறையில் நான்கு முக்கிய முறைகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காணலாம். அம் முறைகளாவன:

1. நியூட்டன் – ராப்ஸன் முறை (Newton – Rophson method)
2. பிழைநிலை முறை (Method of false position)
3. தொடர்பு கணிப்பு முறை (Iterative process)
4. ஹார்னரின் முறை (Horner's process)

1. நியூட்டன் – ராப்ஸன் முறை
(Newton-Rophson Method)

x_1 என்பது $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தோராயத் தீர்வின் மதிப்பென்றால்,

$x_2 = x+l$ என்பதைச் சரியான தீர்வின் மதிப்பாகக் கொள்க.

இதில் l என்பது திருத்த உறுப்பாகும். அப்படியென்றால் $f(x_1 + l) = 0$ என்றாகும்.

இச் சமன்பாட்டை, டெய்லரின் தொடருக்குச் சமன்படுத்தினால்.

$$f(x_1+l) = f(x_1) + \frac{l}{1!} f(x_1) + \frac{h^2}{2!} f''(x_1 + \theta l) = 0$$

என்றாகிறது. இதில், $\theta \in [0\ 1]$

$$\therefore f(x_1) + \frac{l}{1!} f'(x_1) + \frac{h^2}{2!} f''(x_1 + \theta l) = 0$$

l மிகச் சிறியதென்பதால். l^2, l^3 ...... முதலியவை மிக மிகச் சிறியனவாகும்.

எனவே, அவற்றின் மதிப்பைப் பூச்சியம் எனக் கொண்டால்,

$f(x_1) + l f'(x_1) = 0$ எனக் கிடைக்கிறது

$$\therefore l = \frac{-f(x_1)}{f^1(x_1)}$$

இப்பொழுது திருத்திய தீர்வின் மதிப்பு,

$$x_2 = x_1 + l$$

$$= x_1 - \left\{ \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right\}$$

இச் சமன்பாட்டில் $x_1 = x_2$ எனப் பிரதியிட்டால்,

தீர்வின் அடுத்த திருத்திய மதிப்பு

$$x_3 = x_2 - \left\{ \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \right\}$$ என்றாகிறது.

இம் மாதிரி தொடர்ந்து செய்தால்,

$$x_4 = x_3 - \left\{ \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \right\}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x_{k-1} = x_{k-2} - \left\{ \frac{f(x_{k-2})}{f'(x_{k-2})} \right\}$$

$$x_k = x_{k-1} - \left\{ \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \right\}$$

$x_{k-1} = x_k$ என்று இருக்கும்பொழுது $x = x_k$ என்பதே தீர்வின் சரியான மதிப்பாகக் கொள்கிறோம்.

$f'(x_1) = 0$ என்றிருந்தால் இம் முறையைப் பயன்படுத்த முடியாது. ஆனால் பிழை நிலை முறையின் (false position method) மூலம் தீர்வு காண முடியும்.

மாதிரி 7 : $x^3 - 3x + 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வின் தோராய மதிப்பு $x = 1{\cdot}5$ ஆகும். இந்தத் தீர்வை நான்கு தசமத் தானத்திற்குச் சரியாக நியூட்டன் ராபஸன் முறை மூலம் காண்க.

நியூட்டன் ராப்ஸனின் முறைமூலம்

$$x_k = x_{k-1} - \left\{ \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \right\}$$

இதில், $x_k = x_1 = 1{\cdot}5$ எனக் கொண்டு இம் முறையைத் திரும்பத் திரும்பச் செய்து தீர்வின் சரியான மதிப்பினைக் காணலாம்.

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$x_1 = 1.5$$

$$\therefore x_2 = x_1 - \left\{ \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right\}$$

$$= 1{\cdot}5 - \left(\frac{(1{\cdot}5)^3 - 3(1{\cdot}5) + 1}{3(1{\cdot}5)^2 - 3} \right)$$

$$= 1{\cdot}5 - \left\{ \frac{3{\cdot}375 - 3{\cdot}5}{6{\cdot}75 - 3} \right\}$$

$$= 1{\cdot}5 - \left\{ \frac{(-{\cdot}125)}{3{\cdot}75} \right\}$$

$$= 1 \cdot 5 + 0.0333$$
$$= 1 \cdot 5333$$

$$x_3 = x_2 - \left\{ \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \right\}$$

$$x_3 = 1 \cdot 5333 - \frac{[(1 \cdot 5333)^3 - 3(1 \cdot 5333) + 1]}{[3(1 \cdot 5333)^2 - 3]}$$
$$= 1 \cdot 5318$$

எனவே, நான்கு தசமத்தானத்திற்குத் தீர்வு $x = 1 \cdot 5318$

பிழைநிலை முறை : கொடுக்கப்பட்டுள்ள $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தோராயத் தீர்வைப் பட்டறிதல் முறையில் (trial and error method) முதலில் கண்டு கொள்வோம். மாதிரியாக அந்தத் தோராயத் தீர்வு x_1-க்கும் x_2-க்குமிடையே இருப்பதாகக் கொள்வோம். இதில், $x_1 < x_2$. இப்பொழுது, $x_{(2)} = x_1 + l$ என்பதைத் தீர்வின் சரியான மதிப்பாகக் கொள்கிறோம். இதில் l என்பது, திருத்த உறுப்பாகும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பான $f(x)$ என்னும் வரைகோடு. x_1-க்கும் x_2-க்குமிடையில் $[x_2, f(x_2)]$, $[x_1, f(x_1)]$ என்னும் இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோடாகக் கருதி l-ன் மதிப்பைக் காண விழைகிறோம்.

இவ்வாறாக,

$$l = \frac{(x_2 - x_1) \; | f(x_1) |}{| f(x_1) | + | f(x_2) |} \text{ என்று}$$

அறியலாம். இதில், $| f(x_i) | \; i = 1, 2$ என்பது தனி மதிப்பாகும் (absolute value). இப்பொழுது தீர்வின் சரியான மதிப்பு

$$x_{(2)} = x_1 + l$$

$$\therefore x_{(2)} = x_1 + \left[\frac{(x_2 - x_1) \; | f(x_1) |}{| f(x_1) | + | f(x_2) |} \right]$$

இப்பொழுது $x_{(2)}$ உடன் k என்ற திருத்த உறுப்பைக் கூட்டி மேற்சொன்ன முறையில் திரும்பச் செய்தால் மிகத் துல்லியமான தீர்வைக் காணமுடியும்.

மாதிரி 8 :

$$x \log_{10} x - 1 \cdot 2 = 0 \text{ என்றும்,}$$

சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு 2-க்கும் 3-க்கும் இடையே அமைந்துள்ளது அதனைப் பிழைநிலை முறையின்மூலம் ஐந்து தசமத்தானத் திருத்தத்திற்குக் காண்க.

இங்கு, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ எனக் கொண்டு $f(2)$ $f(3)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுதல் வேண்டும்.

	x	$f(x)$	
முதல்	2	$-0·6$	$h_1 = \dfrac{1 \times 0·6}{0·83} = 0·72$
தோராயம்	3	0·23	$x_{(1)} = 2 + 0·72 = 2·72$
வித்தியாசம்	1	0·83	
இரண்டாம்	2·7	$-0·04$	$h_2 = \dfrac{0·1 \times 0·04}{0·09} = 0·044$
தோராயம்	2·8	0·05	$x_{(2)} = 2·74$
வித்தியாசம்	0·1	0·09	
மூன்றாம்	2·74	$-0·0006$	$h_3 = \dfrac{0·01 \times 0·0006}{0·0087} = 0·0007$
தோராயம்	2·75	0·0081	$x_{(3)} = 2·74 + 0·0007$ $= 2·7407$
வித்தியாசம்	0·01	0·0087	
நான்காம்	2·7406	$-0·000039$	$h_4 = \dfrac{0·0001 \times 0·000039}{0·000084}$ $= 0·000046$
தோராயம்	2·7407	0·000045	$x_{(4)} = 2·7406 + 0·000046$ $= 2·74065$

எனில் ஐந்து தசமத்தானத் திருத்தத்திற்குக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு – 2·74065

இருமாறிகள் கொண்ட சமன்பாடுகளுக்கு நியூட்டன் ராப்ஸன் முறை (Newton-Rapson Method for equations in two variables)

இருமாறிகள் கொண்ட இரு சமன்பாடுகளை $f(x,y) = 0$ $g(x.\ y) = 0$ என்று கொள்வோம். இச் சமன்பாடுகளின் தோராயத் தீர்வின் மதிப்புகள் x_1, y_1 என்றும், இவற்றின் திருத்த உறுப்புகள் முறையே l_1, l_2 என்றும் கொண்டால்,

$$f(x_1 + l_1 : \ y_1 + y_2) = 0$$

$g(x_1 + l_1, y_1 + y_2) = 0$ என்று அமையும். இச் சார்புகளை டெய்லரின் தொடருக்கு முறை சமன்படுத்தினால்,

$$f(x_1 + l_1, y_1 + y_2) = 0 = f(x_1, y_1) + l_1 \frac{\delta f}{\delta x_1}$$

$$+ l_2 \frac{\delta g}{\delta y_1} + \ldots\ldots$$

எனப் பெறுகிறோம்.

இவ்விரு சமன்பாடுகளுக்கும் தீர்வு கண்டால் l_1, l_2 களின் மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன.

பின்பு, $x_1 + l_1$, $y_1 + l_2$ என்பவை சரியான தீர்வின் மதிப்புகளை அணுகியிருக்கும். இப்பொழுது $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ எனவும் பிரதியிட்டுத் திரும்பத் திரும்ப இம் முறையைச் செயல்படுத்தினால் சரியான தீர்வின் மதிப்புகளைக் காணமுடியும்.

மேலுள்ள இரு சமன்பாடுகளை,

$$f(x_1, y_1) + l_1 \frac{\delta f}{\delta x_1} + l_2 \frac{\delta f}{\delta y_1} = 0 \ldots\ldots \quad (1)$$

$$g(x_1, y_1) + l_1 \frac{\delta g}{\delta x_1} + l_2 \frac{\delta g}{\delta y_1} = 0 \ldots\ldots \quad (2)$$

எனக் கொள்க.

(1)-க்கும் (2)-க்குமிடையே தீர்வு கண்டால்,

$$l_1 = \frac{g(x_1, y_1) \dfrac{\delta f}{\delta y_1} - f(x_1, y_1) \dfrac{\delta g}{\delta x_1}}{\dfrac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \dfrac{\delta g}{\delta y_1} - \dfrac{\delta f}{\delta y_1} \cdot \dfrac{\delta g}{\delta x_1}}$$

$$l_2 = \frac{f(x_1, y_1)\dfrac{\delta g}{\delta x_1} - g(x_1, y_1)\dfrac{\delta f}{\delta x_1}}{\dfrac{\delta f}{\delta x_1}\dfrac{\delta g}{\delta y_1} - \dfrac{\delta f}{\delta y_1}\dfrac{\delta g}{\delta x_1}}$$

எனக் காண்கிறோம்

இவ்வாறாக, சரியான தீர்வுகளின் மதிப்பு நெருங்கும் தீர்வுகள்

$$x_1 + l_1, \quad y_1 + l_2 \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி 9 ;

கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளின் தோராயத் தீர்வு (3·4, 2 2) எனில், "நியூட்டன் - ராபஸன" முறையின் மூலம் அத் தீர்வை நான்கு தசமத்தானத் திருத்தத்திற்குக் காண்க.

$$x + 3\log_{10} x - y^2 = 0$$

$$2x^2 - xy - 5x + 1 = 0$$

இங்கு,

$$f(x,y) = x + 3\log_{10} x - y^2$$

$$g(x,y) = 2x^2 - xy - 5x + 1$$

இப்பொழுது,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \left\{\frac{0.4349}{x}\right\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 4x - y - 5, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -x$$

$x_1 = 3.4, \quad y_1 = 2.2$ என்பதால்,

$$f(x_1, y_1) = 0{\cdot}1545, \quad g(x_1, y_1) = -0{\cdot}72$$

$$\left(\frac{\partial f}{\delta x}\right)_{x_1} = 1{\cdot}383, \quad \left(\frac{\partial f}{\delta y}\right)_{x_1} = -4{\cdot}4$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x_1} = 6{\cdot}4, \quad \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{x_1} = -3{\cdot}4$$

இதனை, l_1-லும், l_2-லும் பிரதியிட்டால்,

$$l_1 = 0{\cdot}157, \quad l_2 = 0{\cdot}085$$

$$\therefore x_{(1)} = 3{\cdot}4 + 0{\cdot}157 = 3{\cdot}557$$

$$y_{(1)} = 2{\cdot}285$$

இப்பொழுது, $x_{(1)}$, $y_{(1)}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை $f(x_1, y)$, $g(x, y)$ களில் x-க்கும் y-க்கும் முறையே பிரதியிட,

$$f(x_{(1)}\, y_{(1)}) = -0{\cdot}011, \quad g(x_{(1)}, y_{(1)}) = 0{\cdot}3945$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_{(1)}} = 1{\cdot}367, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_{(1)}} = -4{\cdot}57$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_{(1)}} = 6{\cdot}943, \quad \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{x_{(1)}} = -3{\cdot}557$$

இதனை, l_1, l_2 ஆகியவற்றுக்கான சூத்திரத்தில் பிரதியிட்டால், $l_{(1)} = -0{\cdot}0685$, $l_{(2)} = -0{\cdot}0229$. எனவே, $x_{(2)} = 3{\cdot}4885$, $y_{(2)} = 2{\cdot}2621$ இதைத் தொடர்ந்து இன்னொரு முறை செய்தால், $x_{(3)} = 3{\cdot}4782$, $y_{(3)} = 2{\cdot}2615$. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு $x = 3{\cdot}4782$, $y = 2{\cdot}2615$

தொடர் கணிப்பு முறை (Iterative Process)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடான $f(x) = 0$ முடிவில்லாத் தொடராய் இருந்து $x = F(x)$ என அமைக்க முடியுமென்றால் தொடர் கணிப்பு முறை பயன்படுத்தபடுகிறது. கொடுக்கப் பட்டுள்ள $f(x) = 0$ என்னும் சமன் பாட்டிற்கு x_1 என்பது தோராயத் தீர்வின் மதிப்பு எனில், $|F^1(x_1)| < 1$ என இருத்தல் வேண்டும்.

இம் முறையில் அடுத்த தோராய மதிப்புகள்

$$x_k = F(x_{k-1}) \; ; \quad K = 1, 2, 3, \ldots\ldots r \text{ என ஆகும்.}$$

இதில் x_{r-1}-ம் x_r-ம் சமமாகும்வரை இம் முறையைச் செயல் படுத்தவேண்டும்.

மாதிரி 10 : தொடர் முறை கணிப்பு முறையின் மூலம் கீழ்க் காணும் சமன்பாட்டிலிருந்து தீர்வைக் காண்க. $2x - \log_{10} x = 7$.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டினை $x = \frac{1}{2}(\log_{10} x + 7) = F(x)$ என்று எழுதலாம். வரைபடம்மூலம் இச் சமன்பாட்டினைத் தோராயமான தீர்வு 3.8 என்பதை அறிகிறோம்.

இப்பொழுது, $F^1(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)$

இதில், $x = 3.8$ என மதிப்பிட

$|F'(x_1)| = |F'(3.8)| < 1$ ஆக உள்ளது.

எனவே, தொடர் முறையில் தீர்வின் சரியான மதிப்பினைக் காணமுடியும்.

அடுத்தடுத்த தோராய மதிப்புகள் பின்வருமாறு:

$x_1 = 3.8;\ x_2 = F(x_1) = F(3.8) = \frac{1}{2}(\log_{10} 3.8 + 7) = 3.79$

$x_3 = F(x_2) = F(3.79) = \frac{1}{2}(\log_{10} 3.79 + 7) = 3.7893$

$x_4 = F(x_3) = F(3.7893) = \frac{1}{2}(\log 3.7893 + 7) = 3.7893$

இதில், $x_4 = x_3$ என்பதால் மேற்கொண்டு தொடராமல் இதோடு நிறுத்திக் கொள்கிறோம்.

எனவே, தீர்வின் சரியான மதிப்பு 3·7893 ஆகும்.

ஹார்னரின் முறை : ஓர் எண்சார் சமன்பாட்டின் பொதுவளவுள்ள (commensurable), பொதுவளவற்ற (incommensurable) தீர்வுகளைக் கண்டுபிடிக்க ஹார்னரின் முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது.

முதலில் நேர் தீர்வைக் (positive root) காணும் முறையைக் காண்போம். முதலில் தொகைப் பகுதியும் (integral part), பின்பு முதல் தசமத்தையும் (decimal place), அதன் பின்பு இரண்டாம் தசமத்தானத்தையும் தீர்வின் முடிவு காணும் வரை இலக்க இலக்கமாக (figure by figure) தீர்வின் மதிப்பைத் தேவைப்பட்ட செம்மைப் படித்தரத்திற்கு (degree of accurarcy) காண்கிறோம்.

முதலில் பட்டறிதல் முறையில் (trial and error method) இரண்டு முழு எண்களுக்கிடையே (integers) அமைகின்ற நேர் தீர்வை அறிகிறோம். இது தீர்வின் தொகைப் பகுதியாகும். இதை 'a' என்க. பின்பு, சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை a ஆல் குறைக்க வேண்டும் (diminish). பிறகு, மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு 0-க்கும் 1-க்குமிடையே அமையும். கணக்கிடும்போது தசமத்தைத் தவிர்ப்பதற்காக, மாற்றப்பட்ட இந்தச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை 10ஆல் பெருக்குகிறோம். இப்பொழுது மாற்றப்பட்ட புதிய சமன்பாட்டின் தீர்வு 0 க்கும் 10-க்குமிடையே அமையும். இத் தீர்வை முழு எண்ணைகப் பட்டறிமுறையில் அறியவேண்டும். இதை b என்க.

பின்பு தீர்வுகளை b ஆல் குறைத்து 10ஆல் பெருக்கவேண்டும். நமக்குத் தேவைப்பட்ட தசமத்தானத்திற்குத் தீர்வு கிடைக்கும் வரை இம்மாதிரி தொடர்ந்து செய்துகொண்டிருக்கவேண்டும்.

மாதிரி 11: $x^3 - 3x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வை மூன்று தசமத்தானத்திற்குச் சுத்தமாகக் காண்க. இச் சமன்பாட்டின் மூன்று தீர்வுகளிலொன்று 1-க்கும் 2 க்குமிடையே அமைகிறது. இங்குத் தீர்வின் தொகைப் பகுதி 1 ஆகும். இப்பொழுது சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை 1ஆல் குறைக்கவும்,

1	0	−3	1	(1
	1	1	−2	
	1	−2	−1	
	1	2		
	2	0		
	1			
	3			

மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு : $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$.

இந்தச் சமன்பாட்டின் தீர்வு 0-ச்கும் 1-க்கும் இடையே இருக்கிறது. இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை 10ஆல் பெருக்கினால்,

$x^3 + 30x^2 - 1000 = 0$ என்று கிடைக்கிறது.

இந்தச் சார்பின் தீர்வு 5-க்கும் 6-க்கும் இடையே அமைந்துள்ளது. எனவே, இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை 5ஆல் குறைக்கவும்.

1	30	0	−1000	(5
	5	175	875	
	35	175	−125	
	5	200		
	40	375		
	5			
	45			

மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு : $x^3 + 45x^2 + 375x - 125 = 0$.

இந்தச் சமன்பாட்டின் தீர்வு 0-க்கும் 1-க்குமிடையேயுள்ளது. இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை 10ஆல் பெருக்கினால்,

$x^3 + 450x^2 + 37500x - 125000 = 0$ எனக் கிடைக்கிறது. இச் சார்பின் தீர்வு 3-க்கும் 4-க்குமிடையே அமைந்துள்ளது. எனவே, இச் சார்பின் தீர்வுகளை 3ஆல் குறைக்கவும்.

1	450	37500	−125000	(3
	3	1359	116577	
	453	38859	8423	
	3	1368		
	456	40227		
	3			
	459			

மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு : $x^3 + 459x^2 + 40277x - 8423 = 0$.

இச் சார்பின் தீர்வுகளை 10ஆல் பெருக்க,

$x^3 + 4590x^2 + 4022700x - 8423000 = 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

இச் சார்பின் தீர்வு 2-க்கும் 3-க்குமிடையே அமைவதைக் காணலாம். எனவே, இச் சார்பின் தீர்வுகளை 2ஆல் குறைக்கவும்.

1	4590	4022700	−8423000	(2
	2	9114	8063768	
	4592	4031884	−359232	
	2	9188		
	4594	4041072		
	2			
	4596			

மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு : $x^3 + 4596x^2 + 4041072x - 359232 = 0$

இச் சார்பின் தீர்வுகளை 10ஆல் பெருக்கினால் $x^3 + 45960\,x^2 + 404107200\,x - 359232000 = 0$ எனக் கிடைக்கிறது. இச் சார்பின் ஒரு தீர்வு 0-க்கும் 1-க்குமிடையுள்ளது. நமக்கு மூன்று தசமத்தானத்திற்கு மட்டுமே தீர்வு தேவைப்படுவதால் இத்துடன் நிறுத்திக் கொள்ளலாம். மேலும் சில தசமத்தானத்திற்கு வேண்டுமெனில் மேற்சொன்ன முறையைத் தொடர்ந்து செய்தல் வேண்டும். எனவே, $x^3 - 3x + 1 = 0$-ன் ஒரு நேர் தீர்வு $= 1{\cdot}532$

பயிற்சி 5

1. (i) எதிர்மாறு இடைச் செருகல் முறையைப்பற்றிச் சிறு குறிப்பு வரைக.

(ii) $f(x) = 19$ எனில், x-ன் மதிப்பைப் பின்வரும் அட்டவணையிலிருந்து தகுந்த எதிர்மாறு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

x	0	1	2
$f(x)$	0	1	20

2. y_x-ன் மதிப்பு 0.163 என்றால், x-ன் மதிப்பைக் கீழ்க் காணும் அட்டவணையிலிருந்து எழுதுக

x	y_x
80	0·134
82	0·154
84	0·176
86	0·200
88	0·227

3. "இலக்ரான்ஜ்"ஜின் சூத்திரத்தை எதிர்மாறாகப் பயன்படுத்தி $f(x) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் தீர்வைக் கீழ்க் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளிலிருந்து காண்க.

$$f(30) = -30,\quad f(34) = 13,\quad f(38) = 3;\quad f(42) = 18$$

4. எதிர்மாறு இடைச் செருகல் முறையில் $x^3 - 6 - 11 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வை அடுத்தடுத்த தோராய முறையின் மூலம் ஸ்டர்லிங்கின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

5. 1-க்கும் 2-க்குமிடையே அமையும் $10x^3 - 15x + 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வை எதிர்மாறு இடைச்செருகல் முறையால் மூன்று தசமத்தானத் திருத்தத்திற்குக் காண்க.

6. அடுத்தடுத்த தோராய முறையின்மூலம் 'பெஸ்ஸல்'லின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி,

$$I(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} e^{-x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}$$

என இருக்கும்போது கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து x-ன் மதிப்பை நான்கு தசமத்தானத்திற்குச் சுத்தமாகக் காண்க.

x	$I(x)$
0·45	0·475
0·46	0·484
0·47	0·493
0·48	0·502
0·49	0·511
0·50	0·520

7. $x + \log_{10} x = 0\cdot5$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வை அடுத்தடுத்த தோராய முறையின்மூலம் காண்க.

8. தொடர்களை முன்னுக்குப் பின்னுக்கும் முறையின் மூலம் "ஸ்டர்லிங்"கின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f(x) = 13\cdot6$-க்கான x-ன் மதிப்பைப் பின்வரும் அட்டவணையிலிருந்து காண்க.

x	$f(x)$
30	15·9
35	14·9
40	14·1
45	13·3
50	12·5

9. பெஸல், எவரெட் ஆகிய சூத்திரங்களை எதிர்மாறு இடைச் செருகலில் பயன்படுத்த முடியுமா என ஆராய்க.

10. 'நியூட்டன்-ராப்ஸன்' முறையின் மூலம், $x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 11^n + 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வின் தோராய மதிப்பு 1·6 என்றிருக்கும்போது அத்தீர்வை நான்கு தசமத்தானத்திற்குச் சுத்தமாகக் காண்க.

11. $x^4 - 3x^2 + 25x - 10000 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வின் தோராய மதிப்பு 9·8 என்றால் நியூட்டன்-ராப்ஸன்

முறையின்மூலம் அந்தத் தீர்வின் மதிப்பினை 4 தசமத்தானத்திற்குச் சரியாகக் காண்க.

12. $e^x - 4x = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வின் தோராய மதிப்பு 2 எனில், நியூட்டன்-ராப்ஸன் முறையினைப் பயன்படுத்தி அந்தத் தீர்வின் மதிப்பினை மூன்று தசமத்தானத்திற்குச் சரியாகக் காண்க.

13. $f(x_1, y) = 0$, $g(x_1, y) = 0$ என்னும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைச் சரியாகக் கணக்கிடப் பயன்படுத்தப்படும் 'நியூட்டன்-ராப்ஸன்' முறையினை விளக்குக.

14. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளின் ஒரு தீர்வின் தோராய மதிப்பு $(x_1, y_1) = (0{\cdot}226, 0\ 369)$ என்றால், தீர்வின் சரியான மதிப்புகளை நியூட்டன்-ராப்ஸன் முறையின்மூலம் காண்க

$$4{\cdot}2x^2 + 8{\cdot}8y^2 = 1{\cdot}42$$

$$(x - 1{\cdot}2)^2 + (y - 0{\cdot}6)^2 = 1$$

15. $x^3 + 2y^3 = 1$

$5y^3 + 2xy + x^2 = 4$ என்ற சமன்பாடுகளின் ஒரு தீர்வின் தோராய மதிப்பு $(x, y) = (-0{\cdot}6494, 0{\cdot}7981)$ என்பதாகும்.

'நியூட்டன்-ராப்ஸன்' முறையின்மூலம் தீர்வின் சரியான மதிப்பைக் காண்க.

16. $x^4 - 2x - 11 - 9 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு 1-க்கும் 2-க்குமிடையில் உள்ளது. அதனை ஆறு தசமத்தானத்திற்குச் சரியாகப் பிழைநிலை முறையில் காண்க.

17. $x^3 - 2x + 0{\cdot}5 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் சிறிய நேர்த் தீர்வைத் தொடர் கணிப்பு முறையில் காண்க.

18. கீழ்க்காணும் முடிவிலாத் தொடர் . சமன்பாட்டிலிருந்து

$$1 - x + \frac{x^2}{(2!)^2} - \frac{x^3}{(3!)^2} + \frac{x^4}{(4!)^2} - \ldots\ldots = 0$$

ஒரு தீர்வின் மதிப்பைத் தொடர்கணிப்புமுறையின்மூலம் காண்க.

19. மேலேயுள்ள முடிவிலாத் தொடர் சமன்பாட்டின் மெய்த் தீர்வை 6 தசமத்தானத்திற்குச் சரியாகத் தொடர் கணிப்புமுறையில் காண்க.

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \frac{x^{11}}{1320} + \ldots\ldots$$

20. நியூட்டன்-ராப்ஸன் முறையில் $3x - \cos x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மெய்த் தீர்வைக் காண்க.

21. ஹார்னரின் முறையைப் பயன்படுத்திக் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ள சமனபாட்டின் தீர்வை 3 தசமத்தானத்திற்குச் சரியாகக் காண்க. $x^3 - 2x^2 - 3x - 4 = 0$

22. ஹார்னரின் முறைமூலம் $x^4 + 2x^3 - x^2 x = 631064798$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காண்க.

23. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் மிகச் சிறிய நேர்த் தீர்வை ஹார்னர் - முறையின்மூலம் காண்க.

$$x^3 - 4x^2 + 5 = 0$$

24. $x^3 + 18x - 6 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு 0-க்கும் 1-க்கும் இடையில் உள்ளது. மூன்று முறை ஹார்னரின் மாற்றங்களைச் செய்த பிறகு தோராயமாக்கி அம் மூலத்தின் சரியான மதிப்பினைக் காண்க.

25. ஹார்னரின் மாற்றங்களை 3 முறை செய்து அதன்பின் தோராயமாக்கி $x^3 + 6x = 2$ என்னும் சமன்பாட்டின் நேர்த் தீர்வைக் காண்க.

26. $x^4 - 8x^2 + 5x = 8$ என்னும் சமன்பாட்டின் தீர்வு 2-க்கும் 3-க்கும் அத் தீர்வை 3 தசமத்தானத்திற்குச் சரியாகக் காண்க.

6. எண்சார் வகையீடு

(Numerical Differentiation)

குறிப்பிட்ட ஒவ்வொரு மாறியின் மதிப்புக்குச் சார்பின் மதிப்புகள் முறையே அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டிருந்தன. அவ் வட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ள மாறிகளில் ஏதாவதொரு மாறிக்கு வகை வேறுபாடு கண்டுபிடிக்கும் முறைக்கு எண்சார் வகையீடு என்று பெயர்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பை ஒரு இடைச்செருகல் சூத்திரம் மூலம் பல்லுறுப்புக் கோவைக்குத் தோராயமாக்கி எத்தனை முறை வகையீடுகளைக் காண விரும்புகின்றோமோ அத்தனை முறை வகை வேறுபாடு செய்கிறோம்.

சார்பு மாறிகளின் (arguments) மதிப்புகள் சமவெளி யோடமைந்திருந்தால், அச் சார்பை நியூட்டன்-கிரிகோரியின் சூத்திரத்திற்குப் பிரதிநிதித்துவம் (represent) செய்கிறோம்.

வகையீடு காண வேண்டிய சார்பு மாறியின் இருப்பிடம் அட்டவணையின் முன்னணியிலிருந்தால் 'நியூட்டன்-கிரிகோரி'யின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தையும் மையத்திலிருந்தால் மைய வேறு பாட்டுச் சூத்திரங்கள் ஏதாவதொன்றையும் பயன்படுத்துகிறோம்.

முதல்நிலை வகைக் கெழு (First order derivative)

நியூட்டன் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x+hu) = f(x) + \binom{u}{1} \Delta f(x) + \binom{u}{2} \Delta^2 f(x)$$

$$+ \ldots\ldots + \binom{u}{n-1} \Delta^{n-1} f(x) + \binom{u}{n} f^{(n)}(\xi)\, h^n$$

இங்கு h என்பது சார்பு மாறியின் இடைவெளியாகும். ஒரு முறை x-க்கு வகையீடு செய்தால்,

$$h\,\frac{f(x+hu)-f(x)}{hu} = \Delta f(x) + \frac{(u-1)}{2!}\Delta^2 f(x)$$

$$+\frac{(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 f(x)$$

$$+\ldots\ldots+\frac{(u-1)(u-2)\ldots(u-n+2)}{(n-1)!}\Delta^{n-1} f(x)$$

$$+\frac{(u-1)(u-2)\ldots(u-n+1)}{n!} f^{(n)}(\xi)\,h^n \qquad \ldots\ldots (6\cdot 1)$$

இதில் $hu \longrightarrow 0$ எனில் $u \longrightarrow 0$ ஆகும்.

எனவே,

$$hf'(x) = \Delta f(x) - \frac{\Delta^2}{2} f(x) + \frac{\Delta^3}{3} f(x)$$

$$-\ldots\ldots+\frac{(-1)^{n-2}}{n-1}\Delta^{n-1} f(x)$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{n} f^{(n)}(\xi)\,h^n$$

இது முதல் வகைக் கெழுவான $f'(x)$ஐ $f(x)$-ன் வேறுபாடுகளாக அமைக்கிறது.

(6·1)ஐ இருமுறை x-க்கு வகையீடு செய்து $u=0$ எனப் பிரதியிட்டு $n = 6$ எனக் கொண்டால்,

$$h^2 f''(x) = \Delta^2 f(x) - \Delta^3 f(x) + \tfrac{11}{12}\Delta^4 f(x)$$

$$-\ 5/6\ \Delta^5 f(x) + 137/180\ h^6 f^6(\eta)$$

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தவேண்டுமெனில் சார்பு மாறி x-க்கான வேறுபாட்டு அட்டவணையை அமைத்தல் அவசியம். இவ்வாறே நியூட்டனின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்திலிருந்து

$$hf'(x) = \Delta f(x-h) + \frac{\Delta^2}{2} f(x-2h)$$

$$+\frac{h^3}{3} f(x-3h) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{n-1} \Delta^{n-1} f\ [x-(n-1)h]$$

$$+ \frac{h^n}{n} f^{(n)}(\xi)$$

$$h^2 f''(x) = \Delta^2 f(x-2h) + \Delta^3 f(x-3h)$$

$$+ \tfrac{11}{12} \Delta^4 f(x-4h) + \ldots\ldots\ldots$$

'ஸ்டர்லிங்'கின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினால் $u \longrightarrow 0$ என்பதால் இரட்டைப்படை வேறுபாடுகள் மறைகின்றன. எனவே, மைய வேறுபாட்டுக் குறியீடுகள்மூலம்

$$h f'(x) = \mu \delta y_0 - \tfrac{1}{6} \mu \delta^3 y_0 + \tfrac{1}{30} \mu \delta^5 y_0 - \frac{h^7}{140} f^{(7)}(\xi)$$

(7 இடைச்செருகல் புள்ளிகளுக்கு)

மாதிரி 1 : கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் $f(x) = \cos x$ என்ற சார்புக்கான மதிப்புகள்

$x = 0.160$-லிருந்து 0.162 வரை ($h = .001$ என்ற இடைவெளியில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. $f'(0.160)$ $f''(0.160)$ ஆகிய வகைக் கெழுக்களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

x	$f(x) = \cos x$
0·160	0·9872272834
0·161	0·9870674716
0·162	0·9869066727

$x = 0.160$ என்பது முன்னணியில் இருப்பதால், 'நியூட்டன்-கிரிகோரி'யின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

வேறுபாட்டு அட்டவணை

x	$f(x) = \cos x$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
0·160	0·9872272834		
		0·0001598118	
0·161	0·9870674716		0·0000009871
		0·0001607989	
0·162	0·9869066727		

நியூட்டன் முற்போக்குச் சூத்திரத்திலிருந்து

$$h f'(x) = \Delta f(x) - \frac{\Delta^2}{2} f(x) + \frac{1}{3} \Delta^3 f(x)$$

$$- \ldots\ldots + \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} \Delta^{n-1} f(x)$$

$$+ \frac{(-1)^n}{n-1} f^{n+1}(\xi) h^{n+1}$$

$$h^2 f''(x) = \Delta^2 f(x) - \Delta^3 f(x) + \tfrac{11}{12} \Delta^4 f(x)$$

$$- \tfrac{5}{6} \Delta^5 f(x) + \tfrac{137}{180} h^6 f^{(6)}(\xi)$$

ஆனல் வேறுபாட்டு அட்டவணையில் $\Delta^2 f(x)$ வரையுள்ளதால்

$$h f'(x) = \Delta f(x) - \frac{\Delta^2}{2} f(x) + \frac{(-1)^{3-1}}{3} f'''(\xi) \qquad (1)$$

$$h^2 f''(x) = \Delta^2 f(x) - h^3 f'''(\xi) \qquad (2)$$

என்றாகிறது.

இப்பொழுது $x = 0{\cdot}160$, $h = 0{\cdot}001$ என்றால், (1) ம் (2)-ம் பின்வருமாறு அமைகின்றன.

$$0{\cdot}001 \; f'(0{\cdot}160) = -{\cdot}0001598118 + {\cdot}0000049355$$
$$+ \tfrac{1}{3} (0{\cdot}001)^3 f'''(\xi)$$

$$h^2 (0{\cdot}001)^h \; f''(0{\cdot}160) = -{\cdot}0000009871 - (0{\cdot}0001)^3 f'''(\xi)$$

ஆனல் இந்த வீச்செல்லை இடைவெளியில் (Range)

$$f'''(\xi) = \sin \xi = 0{\cdot}16$$

$$\text{எனவே,} \quad f'(0{\cdot}160) = -0{\cdot}1598118 + 0{\cdot}0004936$$
$$= -0{\cdot}1593182$$

$$f''(0{\cdot}160) = -0{\cdot}9871 - 0{\cdot}0001308$$
$$= -0{\cdot}9872308$$

மாதிரி 2 :

கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து நியூட்டன் - கிரிகோரியின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f'(4{\cdot}1)$, $f''(4{\cdot}1)$, $f'(4{\cdot}095)$, $f''(4{\cdot}093)$ என்ற வகையீட்டுக் கெழுக்களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

x :	3·05	3·06	3·07	3·08	3·09	4·1
$f(z)$:	1·25385	1·26996	1·28619	1·30254	1·31903	1·33565

நியூட்டன் - கிரிகோரியின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$h\,f'(x) = \Delta f(x-h) + \frac{\Delta^2}{2} f(a-2h) + \frac{\Delta^3}{3} f(a-3h) + \frac{\Delta^4}{4} f(a-4h) + \ldots\ldots$$

$$h^2 f''(x) = \Delta^2 f(x-2h) + \Delta^3 f(a-3h) + \tfrac{11}{12} \Delta^4 f(a-4h) + \ldots\ldots$$

இங்கு, $x_0 = 4{\cdot}1$, $h = 0{\cdot}01$

எனவே, $x_0 + hu = 4{\cdot}1 \Rightarrow u = x$

இப்பொழுது, $x_0 + hu = 4{\cdot}095$ எனில்,

$$u = \frac{4{\cdot}095 - 4{\cdot}1}{0{\cdot}01} = -0{\cdot}5$$

$x_0 + hu = 4{\cdot}093$ எனில்,

$$u = \frac{4{\cdot}093 - 4{\cdot}1}{0{\cdot}01} = -0{\cdot}7$$

வேறுபாட்டு அட்டவணை

$x = x_0 + hu$	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
$x_0 - 5h = 3{\cdot}05$	1·25836			
		0·01610		
$x_0 - 4h = 3{\cdot}06$	1·26996		0·00013	
		0·01623		−0·00001
$x_0 - 3h = 3{\cdot}07$	1·28619		0·00012	
		0·01635		0·00002
$x_0 - 2h = 3{\cdot}08$	1·30254		0·00014	
		0·01649		−0·00001
$x_0 - h = 3{\cdot}09$	1·31903		0·00013	
		0·01662		
$x_0 = 4{\cdot}10$	1·33565			

$$0{\cdot}01\, f'(4{\cdot}1) = \left[\, 0{\cdot}01662 + \tfrac{1}{2}(0{\cdot}00013) + \tfrac{1}{3}(-0{\cdot}00001) \,\right] + \ldots\ldots$$

$$= 0{\cdot}0166817$$

$$\therefore f'(4{\cdot}1) = 1{\cdot}66817$$

$$(0.01)^2\, f''(4.1) = [\,(0{\cdot}00013) + (-0.00001) + \ldots\ldots\,]$$

$$\therefore (0{\cdot}01)^2 f''(4{\cdot}1) = 0.00012$$

$$\therefore f''(4{\cdot}1) = 1{\cdot}20$$

முதற்படி வகையீட்டுக் கெழுவைக் காண உதவும் நியூட்டன் கிரிகோரியின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தில்,

$$hf'(x+hu) = \Delta f(x-h) + \frac{2u+1}{2}\Delta^2 f(x-2h) + \frac{3u^2+6u+2}{6}\Delta^3 f(x-3h) + \frac{4u^3+18u^2+22u+6}{24}\Delta^4 f(x-4h) + \ldots\ldots$$

$u = -\frac{1}{2}$ எனப் பிரதியிட $f'(4{\cdot}095)$-ன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

$$[\,0{\cdot}01\,] f'[\,4{\cdot}1 + 0{\cdot}01(-\tfrac{1}{2})\,]$$

$$= [\,0{\cdot}01662 + 0 + 0{\cdot}0000028\,]$$

அல்லது $f'(4{\cdot}095) = \dfrac{1}{0{\cdot}01}\,[0{\cdot}016628]$

$$= 1{\cdot}66228$$

$(x+hu)$ என்னுமிடத்தில் இரண்டாம் வகையீட்டுக் கெழுவைக் காண உதவும் நியூட்டன் — கிரிகோரியின் பிற்போக்குச் சூத்திரமாவது,

$$h^2 f''(x+hu) = \Delta^2 f(x-2h) + (u+1)\Delta^3 f(x-3h) + \frac{6x^2+18x+11}{12}\Delta^4 f(x-4h) + \ldots\ldots$$

இதில், $u = -0{\cdot}7$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$(0{\cdot}01)^2 f''[4{\cdot}1 + (0{\cdot}01)(-0{\cdot}7)] = [0{\cdot}00013 - 0{\cdot}0000{\cdot}03]$$

$$\therefore (0{\cdot}01)^2 f''(4{\cdot}093) = (0{\cdot}00013 - 0{\cdot}0000\ 3)$$

அல்லது $f''(4{\cdot}093) = 1{\cdot}27$

'ஸ்டர்லிங்'கின் சூத்திரத்திலிருந்து வகைக்கெழுக்கள் (Differential coefficients from Stirling's Formula)

'ஸ்டர்லிங்'கின் சூத்திரத்தை மைய வேறுபாட்டுக் குறியீடு மூலமாகக் (Central difference Notation) கருதுக.

$$f(x+hu) = y_u = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u(u^2-1^2)(u^2-2^2)\dots(u^2-k^2)}{(2k+1)!} \mu\delta^{2k+1}_{y_0}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} u^2(u^2-1^2)(u^2-2^2)\dots[u^2-(k-1)^2]\,\delta^{2k}_{y_0}$$

$$+ h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi)\frac{u(u^2-1^2)\dots\dots(u^2-n^2)}{(2n+1)!},$$

$$x_{-n} < \xi < x_n$$

(4ஆம் அத்தியாயத்தைப் பார்க்கவும்)

$$= y_0 + \sum_{k=0}^{n} \binom{u+k}{2k+1} \mu\delta^{2k+1}_{y_0}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{u}{2k}\binom{u+k-1}{2k-1}$$

$$+ \binom{u+n}{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi)\, h^{2n+1} \dots\dots \qquad (6{\cdot}2)$$

(6·2)ஐ ஒரு முறை u-க்கு வகையீடு செய்து $u=0$ எனப் பிரதியிட்டால், $n=7$-க்கு

$$hf'(x) = \mu\delta y_0 - \tfrac{1}{6}\mu\delta^3 y_0 + \tfrac{1}{30}\mu\delta^5 y_0$$

$$- \frac{h^7}{140} f^{(7)}(\xi)$$

என்று கிடைக்கிறது

(6·2)ஐ இருமுறை u-க்கு வகையீடு செய்து $u \longrightarrow 0$ என்று செய்தால், $n = 7$-க்கு

$$h^2 f''(x) = \delta^2 y_0 - \frac{1}{12}\delta^4 y_0 + \frac{1}{90}\delta^6 y_0 - \frac{h^8}{560} f^{(8)}(\xi)$$

என்று கிடைக்கிறது.

(6·2)ஐ மும்முறை u-க்கு வகையீடு செய்து $u \longrightarrow 0$ என்று செய்தால் $n = 7$-க்கு

$$h^3 f'''(x) = \mu\delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\mu\delta^5 y_0 + 7h^7 f^{(7)}(\xi_1)$$

$$- \frac{h^9}{168} f^{(9)}(\xi_2)$$

என்று மேன்மேலும் உயர்நிலை வகைக்கெழுக்களை ஸ்டர்லிங் சூத்திரத்திலிருந்து பெறலாம்.

மாதிரி 1 : $y = 2e^{x} - x$ சார்பிற்கு $x = 0·4$-லிருந்து $x = 0·8$ வரை, $h = 0·1$ என்ற இடைவெளியில் y-ன் மதிப்புகள் கீழே அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. 'ஸ்டர்லிங்'கின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f'(0·6)$, $f''(0·6)$ என்ற வகைக்கெழுக்களின் மதிப்பைக் காண்க.

x	y
0·4	0·[illegible]836494
0·5	0·7974426
0·6	1·0442376
0·7	1·3275054
0·8	1·651[illegible]8[illegible]8

'ஸ்டர்லிங்'கின் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$hf'(x) = \mu\delta y_0 - \frac{1}{6}\mu\delta^3 y_0 + \frac{1}{30}\mu\delta^5 y_0 - \frac{h^7}{140} f^{(7)}(\xi)$$

$$h^2 f''(x) = \delta^2 y_0 - \frac{1}{12}\delta^4 y_0 + \frac{1}{90}\delta^6 y_0 - \frac{h^8}{560} f^{(8)}(\xi)$$

வேறுபாட்டு அட்டவணை

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0·4	0·5836494				
		0·2137932			
0·5	0·7974426		0·0330018		
		0·2467950		0·0034710	
0·6	1·0442376		0·0364728		0·0003648
		0·2832678		0·0038358	
0·7	1·3275054		0·0403086		
		0·3235764			
0·8	1·6510818				

எனவே,

$$(0{\cdot}1)\, f'(0{\cdot}6) = \left\{ \frac{{\cdot}2467950 + 0{\cdot}2832678}{2} \right\} - \frac{1}{6} \left\{ \frac{{\cdot}0034710 + 0{\cdot}0038358}{2} \right\}$$

$$= \frac{{\cdot}5300628}{2} - \frac{1}{12}({\cdot}0073068)$$

$$= 0{\cdot}2650314 - 0{\cdot}0006089$$

$$= 0{\cdot}2644225$$

$$\therefore f'(0{\cdot}6) = \frac{1}{0{\cdot}1}\,(0{\cdot}2644225)$$

$$= 2{\cdot}644225$$

இப்பொழுது $(0{\cdot}1)^2 f''(0{\cdot}6) = 0{\cdot}0364728 - \frac{1}{12}(0{\cdot}0003648)$

$$= 0{\cdot}0364728 - 0{\cdot}0000304$$

$$= 0{\cdot}0364424$$

$$\therefore f''(0{\cdot}6) = \frac{1}{(0{\cdot}1)^2}\,(0{\cdot}0364424)$$

$$= 3{\cdot}64424$$

பெஸ்ஸலின் சூத்திரத்திலிருந்து வகைக்கெழுக்கள் (Differential coefficents from Bessel's formula)

மைய வேறுபாட்டுக் குறியீடுகள் கொண்ட 'பெஸ்ஸல்'லின் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x+hu) = y_u = y_0 + u\,\delta y_{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(u-\frac{1}{2})}{2k+1} \binom{u+k-1}{2k} \delta^{2k+1} y_{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{u+k-1}{2k} \mu\,\delta^{2k} y_{\frac{1}{2}}$$

$$+ h^{2n} \binom{u+n-1}{2n} f^{(2n)}(\xi) \quad \ldots \quad (6\cdot3)$$

(6·3) ஐ ஒருமுறை u-க்கு வகையீடு செய்து $u = \frac{1}{2}$ எனப் பிரதியிட்டால், $n = 5$-க்கு

$$h f'(x+\tfrac{1}{2}h) = \delta y_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{24}\,\delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{3}{640}\,\delta^5 y_{\frac{1}{2}} + \frac{3h^5}{640} f^{(5)}(\xi)$$

(6·3)ஐ இருமுறை வகையீடு செய்து $u = \frac{1}{2}$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$h^2 f''(x+\tfrac{1}{2}h) = \mu\,\delta^2 y_{\frac{1}{2}} - \frac{5}{24}\,\mu\,\delta^4 y_{\frac{1}{2}} + \frac{259}{5760} h^6 f^{(6)}(\xi_1)$$

$$- \frac{5h^8}{28672} f^{(8)}(\xi_2) \quad \text{ஆகும்}$$

மாதிரி 2 : மாதிரி (1) லிருந்து 'பெஸ்ஸல்'லின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f'(\cdot 65)$, $f''(\cdot 65)$ என்ற கெழுக்களின் மதிப்பினைக் காண்க.

'பெஸ்ஸல்'லின் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$h f'(x+\tfrac{1}{2}h) = \delta y_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{24}\,\delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{3\delta^5}{640}\,y_{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{3h^5}{640} f^{(5)}(\xi)$$

$$h^2 f''(x+\tfrac{1}{2}h) = \mu\delta^2 y_{\frac{1}{2}} - \frac{5}{24}\mu\delta^4 y_{\frac{1}{2}} + \frac{259}{5760} h^6 f^{(6)}(\xi_1)$$

$$- \frac{5h^8}{28672} f^{(8)}(\xi_2)$$

இங்கு $h = 0{\cdot}1$ என்பதால்,

$$(0{\cdot}1) f'(0{\cdot}6 + \frac{0{\cdot}1}{2}) = 0{\cdot}2832678$$

$$\therefore \boxed{f'(0{\cdot}65) = 2{\cdot}832678}$$

இப்பொழுது, $(0{\cdot}1)^2 f''\left(0{\cdot}6 + \frac{0{\cdot}1}{2}\right) = \frac{0{\cdot}0364728 + 0{\cdot}0403086}{2}$

$$= \frac{0{\cdot}0767814}{2}$$

$$= 0{\cdot}0383907$$

$$\therefore f''(0{\cdot}65) = \frac{0{\cdot}0383907}{(0{\cdot}1)^2}$$

$$\boxed{f''(0{\cdot}65) = 3{\cdot}83907}$$

நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்திற்கு வகைக் கெழுக்கள் (Differential coefficients from Newton's Divided difference formula)

நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டு இடைச்செருகல் சூத்திரம்,

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ (x-x_0) f(x_0, x_1) \\ &+ (x-x_0)(x-x_1) f(x_0, x_1, x_2) \\ &+ \ldots\ldots\ldots + (x-x_0)(x-x_1) \ldots\ldots \\ &\quad (x-x_{k-1}) f(x_0, x_1, \ldots x_n) + R_n \end{aligned}$$

இதனை x-க்கு வகையீடு செய்தால்,

$$f'(x) = f(x_0, x_1) + [(x-x_0) + (x-x_1)] f(x_0, x_1, x_2)$$

$$+ [(x-x_0)(x-x_1) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_1)(x-x_2)]$$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

$$+ [(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3) + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)] f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) + \ldots\ldots$$

இந்தச் சூத்திரத்தை x-க்கு மீண்டுமொருமுறை வகையீடு செய்தால்,

$$f''(x) = 2 \{ f(x_0, x_1, x_2) + [(x-x_0) + (x-x_1) + (x-x_2)] f(x_0, x_1, x_2, x_3) + [(x-x_0)(x-x_1) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_3) + (x-x_1)(x-x_2) + (x-x_1)(x-x_3)] f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) + \ldots\ldots \}$$

இதனை மேலும் ஒரு முறை வகையீடு செய்தால்

$$f'''(x) = 3! \{ f(x_0, x_1, x_2, x_3) + [(x-x_0) + (x-x_1) + (x-x_2) + (x-x_3)] f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) + \ldots\ldots \}$$

மாதிரி :

வகுபட்ட வேறுபாடுகளைப் பயன்படுத்திக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பின் மதிப்புகளிலிருந்து $f'(5)$, $f''(5)$, $f'''(5)$ ஆகிய வகையீட்டுக் கெழுக்களைக் கணக்கிடுக.

x :	4	5	7	10	11	13
$f(x) = x^3 - x^2$:	48	100	294	900	1210	2028

நியூட்டன் எண்ணியல் வகையீட்டுச் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி இக் கெழுக்களைக் காணலாம்.

வகுபட்ட வேறுபாட்டு அட்டவணை

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 (x)$	$\Delta^5 f(x)$
4	48					
		52				
5	100		15			
		97		1		
7	294		21		0	
		202		1		0
10	900		27		0	
		310		1		
11	1210		33			
		409				
13	2028					

$x = 5$ எனின்,

$$(x-x_0),\ (x-x_1),\ (x-x_2),\ (x-x_3),\ (x-x_4),\ (x-x_5)$$

ஆகியவற்றின் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$\begin{aligned}
x_0 &= 4 \quad ; \quad & x-x_0 &= 1\\
x_1 &= 5 \quad ; \quad & x-x_1 &= 0\\
x_2 &= 7 \quad ; \quad & x-x_2 &= -2\\
x_3 &= 10 \quad ; \quad & x-x_3 &= -5\\
x_4 &= 11 \quad ; \quad & x-x_4 &= -6\\
x_5 &= 13 \quad ; \quad & x-x_5 &= -8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) = {} & f(x_0, x_1) + [(x-x_0)+(x-x_1)]\, f(x_0, x_1, x_2)\\
& + [(x-x_0)(x-x_1) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_1)(x-x_2)]\\
& \qquad f(x_0, x_1, x_2, x_3)\\
& + [(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\\
& \quad + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3) + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)]\\
& \qquad f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)\\
& + \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(5) = {} & 52 + (1+0)\, 15 + [(1)(0) + (1)(-2) + (0)(-2)]\, 1\\
& + [(1)(0)(-2) + (1)(0)(-5) + (1)(-2)(-5)\\
& + (0)(-2)(-5)]\, 0\\
= {} & 52 + 15 - 2
\end{aligned}$$

$$f'(5) = 65$$

இப்பொழுது,

$$\begin{aligned}
f''(x) = 2\{ & f(x_0, x_1, x_2) + [(x-x_0) + (x-x_1) + (x-x_2)]\\
& \qquad f(x_0, x_1, x_2, x_3)\\
& + [(x-x_0)(x-x_1) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_3)\\
& + (x-x_1)(x-x_2) + (x-x_4)(x-x_3)]\ f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)\\
& + \ldots\ldots \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(5) = {} & 2\{15 + (1+0-2)\, 1 + [(1)(0) + (1)(-2)\\
& + (1)(-5)\,(0)(-2) + (0)(-5)]\, 0\}\\
= {} & 2\ \{15 - 1 + 0\}
\end{aligned}$$

$$f''(5) = 28$$

சார்புகளின் உச்ச, நீச மதிப்புகள் (Maximum and minimum values of a function)

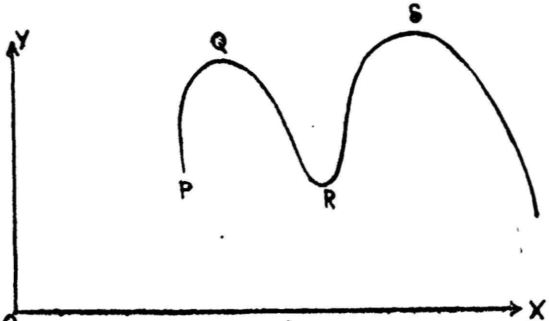
$y = f(x)$ என்ற சார்பில் $x = a$ என்ற புள்ளியில் $f(x)$-ன் மதிப்பு $f(a)$ ஆகும். இப் புள்ளிக்கு இருமருங்கிலுள்ள $x = a - h$, $x = a + h$ என்ற இரு புள்ளிகளில் $f(x)$-ன் மதிப்பு $f(a - h)$, $f(a + h)$ என்றாகிறது. $f(a - h)$, $f(a + h)$ ஆகிய இவ்விரண்டு மதிப்புகளைவிட $f(a)$-ன் மதிப்புப் பெரியதென்றால், $f(x)$ $x = a$ என்ற இடத்தில் உச்ச மதிப்பைப் பெறுகிறது என்று கூறுகிறோம்.

அவ்வாறில்லாமல் $f(a - h)$, $f(a + h)$ என்ற இவ் விரண்டு மதிப்புகள் $f(a)$ஐ விடச் சிறியதென்றால், $f(x)$, $x = a$ என்ற புள்ளியில் நீச மதிப்பைப் பெறுகிறது என்று கூறுகிறோம்.

தேற்றம் : (i) $f(x)$, $x = a$ என்ற புள்ளியில் உச்ச மதிப்பைப் பெற்றால், $f'(a) = 0$ ஆகவும், $f''(a) < 0$ ஆகவும் இருக்கும்.

(ii) $f(x)$, $x = a$ என்ற புள்ளியில் 0 நீச மதிப்பைப் பெற்றால் $f'(a) = 0$ ஆகவும், $f''(a) > 0$ ஆகவும் இருக்கும்.

$y = f(x)$ என்ற சார்பை வரைபடமாகப் படம் 11-ல் வரையப் பட்டுள்ளது.



படம் 11

p என்ற புள்ளி $x = a$ என்றிருக்கட்டும். இப் புள்ளியில் y-ன் மதிப்பு PQ-க்கு இருமருங்கிலுமுள்ள y-ன் மதிப்பைவிடப் பெரியது. எனவே, Q புள்ளியில் சார்பு உச்ச மதிப்பைப் பெறும். வளைவரையில் PQ பகுதியில் உள்ள புள்ளிகளின் x ஆய தொலை மதிப்பும் அதிகமாக ஆக, y ஆயத் தொலை மதிப்பும் அதிகமாகிறது.

FQ பகுதியில் சார்பு கூடுஞ் சார்பாகிறது (increasing function). இங்கு முதல் வகையீட்டுக் கெழு நேர்முகமாக அமைகிறது. QR என்ற பகுதியில் உள்ள புள்ளிகளில் x ஆயத் தொலை கூடக்கூட, y ஆயத் தொலை குறைகின்றது. இப் பகுதியில் சார்பு குறையுஞ் சார்பாக (decreasing function) அமைந்துள்ளது. இங்கு முதல் வகையீட்டுக் கெழு எதிர்முகமாக அமைந்துள்ளது. எனவே, P-ல் முதல் வகையீட்டுக் கெழு பூச்சியமாகத்தான் இருக்கவேண்டும்.

இதேபோல், R வழியாக வளைவரைவு செல்லுகையில் முதல் வகையீட்டுக் கெழுவின் குறி எதிரெண்ணிலிருந்து நேரெண்ணாக மாறுகிறது (negative to positive). R-ல் முதல் வகையீட்டுக் கெழு பூச்சியமாகும். எனவே, Q, R முதலிய புள்ளிகளைத் திரும்பும் புள்ளிகள் (turning point) எனக் கூறுகிறோம்.

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $f(x)$ எனில், $f'(x)=0$ என்று செய்து கண்டால், x-ன் மதிப்புகள் திரும்பும் புள்ளிகளின் (turning points) மதிப்புகளாகும்.

$f''(x)$ ஐக் கணக்கிட்டு, அதில் திரும்பும் புள்ளிகளின் x மதிப்புகளை ஒவ்வொன்றாகப் பிரதியிட்டு, $f''(x)$-ன் குறி எதிரானால் (negative), அந்த x-ன் மதிப்புள்ள புள்ளியில் உச்ச மதிப்பைச் (maximum value) சார்பு பெறுகிறதென்கிறோம். அவ்வாறன்றி $f''(x)$-ன் குறி நேரானால் (positive) அந்த x-ன் மதிப்புள்ள புள்ளியில் நீச மதிப்பைச் சார்பு பெறுகிறதென்கிறோம்.

சார்பின் அமைப்பு எண்ணியற் கணிதமுறையில் கொடுக்கப்படாமல் சார்பின் மதிப்புகள் சில குறிப்பிட்ட இடங்களில் சம அல்லது அசம இடைவெளியே அட்டவணைப்படுத்தபட்டிருக்கும்.

இப்பொழுது சம இடைவெளியில் அமைந்த $f(x)$-ன் மதிப்புகளைக் கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் காண்கிறோம்.

x	$f(x)$
a	$f(a)$
$a+h$	$f(a+h)$
$a+2h$	$f(a+2h)$
$a+3h$	$f(a+3h)$

சார்பு சம இடைவெளியில் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டிருப்பதால், சம இடைவெளிக்காக இடைச்செருகல் சூத்திரங்களின் எண்ணியல் வகையீட்டுச் சூத்திரங்களில் (Numerical differentiation formula) ஏதாவதொன்றைப் பயன்படுத்தி இதில் வேறுபாட்டு அட்டவணையிலிருந்து வேறுபாடுகளுக்குப் பிரதியிட்டு $f'(x)=0$ எனச் சமன்படுத்தி தீர்வுகளைக் காண்கிறோம். இத் தீர்வு

களின் மதிப்புகளில்தான் சார்பின் உச்ச நீச மதிப்புகள் அமைந்துள்ளன. இப்பொழுது சார்பின் இரண்டாம் வகையீட்டுக்கெழுவான $f''(x)$-ல் மேற்கண்ட தீர்வுகளின் மதிப்புகளை ஒவ்வொன்றாகப் பிரதியிட்டு அதனால் விளையும் குறிகள் நேரெண்ணாக உள்ளதா என்று பார்க்கிறோம். ஒரு புள்ளியில் அக் குறி எதிரெண்ணாக இருந்தால், அப் புள்ளியில் $f(x)$ உச்சமதிப்பைப் பெறுகிறது என்று கூறுகிறோம். அவ்வாறன்றி அந்தப் புள்ளியில் அக் குறி நேரெண்ணாக இருப்பின், $f(x)$ நீச மதிப்பை அந்தப் புள்ளியில் பெறுகிறது என்கிறோம்.

மாதிரி: கீழே கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் உச்ச நீச மதிப்புகளைக் காண்க.

x :	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	2.0	−0·25	0	−0·25	2·0	15·75	56·00

சார்பு சம இடைவெளியில் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டிருப்பதால் நியூட்டனின் எண்ணியல் வகையீட்டுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f'(x) = 0$-ஐப் பெறலாம்.

நியூட்டனின் வகையீட்டுச் சூத்திரமாவது,

$$f'(x) = \Delta f(0) + \frac{2x-1}{2}\Delta^2 f(0) + \frac{3x^2-6x+2}{6}\Delta^3 f(0)$$

$$+\frac{1}{24}(4x^3 - 18x^2 + 22x - 6)\Delta^4 f(0)$$

$$+\ldots\ldots$$

வேறுபாடுகளின் மதிப்புகளைக் காண, சார்பின் வேறுபாட்டு அட்டவணை பின்வருமாறு:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$	$\Delta^6 f(x)$
−2	2·00						
		−2·25					
−1	−0·25		2·50				
		0·25		−3·00			
0	0		−0·50		6·00		
		−0·25		3·00		0	
1	−0·25		2·50		6·00		0
		2·25		9·00		0	
2	2·00		11·50		6·00		
		13·75		15·00			
3	15·75		26·50				
		40·25					
4	56·00						

இவ் வட்டவணையிலிருந்து வேறுபாடுகளுக்கு மேலேயுள்ள சூத்திரத்தில் பிரதியிட,

$$f'(x) = -0{\cdot}25 + \frac{(2x-1)}{2}(2{\cdot}5) + \frac{(3x^2-6x+2)}{6}(9{\cdot}00)$$

$$+\frac{1}{24}(4x^3 - 18x^2 + 22x - 6)(6{\cdot}00)$$

$$= x^3 - x$$

$$f'(x) = x^3 - x$$

இதனைப் பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்தினல்,

$$x^3 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0$$

எனவே, $x = 0, -1, +1$ ஆகிய மூன்று தீர்வுகளில் சார்பின் உச்ச, நீச மதிப்புகள் அமைந்துள்ளன.

$$f''(x) = 3x^2 - 1 = 0$$

இதில் நாம் கண்ட தீர்வுகளின் மதிப்புகளை ஒவ்வொன்றும் பிரதியிடுவோம்.

$$\therefore f''(0) = -1 < 0$$

$$f''(1) = 2 > 0, f''(-1) > 0$$

எனவே, $x = 0$ என்ற புள்ளியில் $f(x)$ உச்ச மதிப்பையும் $x = -1, +1$ ஆகிய புள்ளிகளில் நீச மதிப்பையும் பெறுகிறது. இவ்வாருக, $x = 0$ என்ற புள்ளியில் $f(x)$-ன் உச்சமதிப்புப் பூச்சியம்.

$x = 1$ புள்ளியில் $f(x)$-ன் நீச மதிப்பு $= -0{\cdot}25$

$x = -1$ என்ற புள்ளியில் $f(x)$-ன் நீச மதிப்பு $= -0{\cdot}25$

பயிற்சி 6

1. 'பெஸ்ஸல்'லின் சூத்திரத்தைக் கருத்தில் கொண்டு கீழுள்ளவற்றை நிரூபிக்கவும்.

(i) $$\frac{d}{dx}y_x = \Delta y_{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{24}\Delta^3 y_{x-\frac{3}{2}} + \ldots\ldots$$

(ii) $$\frac{d^2}{dx^2}y_x = \frac{1}{2}(\Delta^2 y_{x-\frac{3}{2}} + \Delta^2 y_{x-\frac{1}{2}})$$

2. 'ஸ்டர்லிங்'கின் சூத்திரத்தை ஒருமுறை வகையீடு செய்து ஆதியை மாற்றினால் மூன்றும் நிலை வேறுபாடுவரை.

$$\frac{dy_x}{dx} = \frac{2}{3}(y_{x+1} - y_{x-1}) - \frac{1}{12}(y_{x+2} - y_{x-2})$$

என்பதை நிறுவுக.

3. நியூட்டன் - கிரிகோரியின் இடைச் செருகல் சூத்திரத்தை மும்முறை வகையீடு செய்வதால் கிடைக்கும் முடிவு $\Delta^4 y_0 + (x - \frac{2}{3}) \Delta^4 y_0$ என்பதை நிறுவுக.

4. கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து முதல் இரு வகையீட்டுக் கெழுக்களை $x = 0{\cdot}6$ என்ற புள்ளியில் காண்க.

x	$f(x)$
0·4	1·5836494
0·5	1·7974426
0·6	2·0442376
0·7	2·3275054
0 8	2·6510818

5. கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து, தகுந்த வகையீட்டுக் கெழுக்கான சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f'(10)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	$f(x)$
3	–13
5	23
11	899
27	17315
34	35606

6. கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து $x = 4$ என்ற புள்ளியில் முதல் இரு வகையீட்டுக் கெழுக்களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

x	1	2	4	8	10
y	0	1	5	21	25

7. $y = \sqrt[3]{x}$ என்ற சார்பின் மதிப்புகள் $x = 50$-லிருந்து $x = 56$ வரை $h = 1$ என்ற சம இடைவெளியில் அட்டவணைப்

படுத்தப்பட்டுள்ளது. இச் சார்பின் முதல் இருவகையீட்டுக் கெழுக்களை $x = 50$ என்ற புள்ளியில் காண்க.

x	$y = \sqrt[3]{x}$
50	3·6840
51	3·7084
52	3·7325
53	3·7563
54	3·7798
55	3·8030
56	3·8259

8. கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து $x = 1·35$ என்னுமிடத்தில் முதல் இரு வகையீட்டுக் கெழுக்களைப் பெஸ்ஸல்லின் எண்ணியல் வகையீட்டுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

x	$f(x)$
1·1	−1·62628
1·2	0·15584
1·3	2·45258
1·4	5·39168
1·5	9.12500
1·6	13·83072

9. கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து $f'(3·0)$, $f'(3·2)$, ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

x	$f(x)$
0	1·000
0·1	1·101
0·2	1·220
0·3	1·362
0·4	1·528
0·5	1·721
0·6	1·943

10. நியூட்டன் – கிரிகோரியின் பிற்போக்கு எண்ணியல் வகையீட்டுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f'(440)$, $f''(440)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

x	$f(x)$
400	2·6020
410	2.6128
420	2·6232
430	2·6335
440	2·6435

11. எண்ணியல் வகையீட்டுக் கெழுவைக் காண ஒரு சூத்திரத்தை நிறுவுக. அதனைப் பயன்படுத்தி $f'(2{\cdot}10)$, $f''(2{\cdot}10)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து பெறுக.

x	$f(x)$
2·01	1·25386
2·06	1·26996
2·07	1·28619
2·08	1·30254
2·09	1·31903
2·10	1·33565

12. நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி முதல் வகையீட்டுக் கெழுவை $x = 8$ என்ற புள்ளியில் காண்க.

x :	6	7	9	12
$f(x)$:	1·556	1·690	1·908	2·158

13. கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து $x = 1{\cdot}3$ என்ற புள்ளியில் முதலிரு வகையீட்டுக் கெழுக்களைக் காண்க.

x :	1·1	1·2	1.5	1·7
$f(x)$:	0·3329	0·3012	0·2231	0·1827

14. கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து $f'(6)$, $f''(6)$ ஆகிய வகையீட்டுக் கெழுக்களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

x :	-1	0	2	3	7	10
$f(x)$:	-11	1	1	1	141	561

15. கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பின் நீச மதிப்பைக் காண்க.

x	3	4	5	6	7	8
y	-205	-240	-259	-262	-250	-224

16. x-ன் எந்த மதிப்புக்குக் கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலுள்ள சார்பு நீசத்தைப் பெறுகிறது.

x	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7
y	0.9182	0·8975	0·8873	0·8862	0·8935	0·9086

17. ஜனவரி மாதம் 1918-ஆம் ஆண்டு சூரியனின் நடுவரை விலக்கம் ((declination) கிரீன்விச்சில் சில தினங்களுக்குக் கணக்இடப்பட்டது. எப்பொழுது நடுவரை விலக்கம் உச்சத்திலிருந்தது என்பதைக் காண்க,

நாள்	நடுவரை விலக்கம்		
ஜூன் 19	23	26′	23·5″
,, 20	23°	26′	19 4″
,, 21	23	26′	50·5″
,, 22	23	26′	56·8″
,, 23	23°	26′	38·3″
,, 24	23°	25′	55·1″
,, 25	23°	24′	47·1″

18. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பின் உச்சநீச மதிப்புகளைக் காண்க.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	9	16	9	0	25	144

7. எண்சார் தொகையீடு

(Numerical Integration)

தொகை சார்பின் (integrand) மதிப்புகளிலிருந்து (numerical values) சம அல்லது அசம இடைவெளி கொண்ட எண்சார் வகையறுத்த தொகையின் (definite integral) மதிப்பினைக் கணக்கிடும் செய்கைக்கு (process) எண்சார் தொகை காணல் (numerical integration) என்று பெயர். ஒரே மாறியின் சார்பின் தொகையிடல் (integration) செய்கைக்குப் பொறிமுறையான பரப்புகாண் முறை (mechanical quadrature) என்று பெயர்.

எண்சார் வகையீடு காணும் முறையைப்போலவே தொகைச் சார்பை (integrand) ஓர் இடைச் செருகல் சூத்திரத்திற்குப் பிரதிநிதித்துவம் (representation) செய்து தேவைப்பட்ட எல்லைகளில் தொகைப்படுத்துகின்றோம். இவ்வாறாக,

$\int_a^b ydx$ என்ற வகையறுத்த தொகையின் மதிப்பினைக் காணச் சார்பு y-க்குப் பதிலாக ஓர் இடைச் செருகல் சூத்திரத்தைக் கருதி a-க்கும் b-க்குமிடையே தொகைப்படுத்துகின்றோம். இம் மாதிரியாக ஒரு சார்பின் எண்சார் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்து அச் சார்பின் தோராயமான தொகையீட்டை (integration) காண்பதற்கான பரப்புகாண் முறை (quadrature) சூத்திரங்களை வருவிக்கலாம் (derive). சமநிலைத் தூரங்களுக்கு ஒரு பொதுவான பரப்பு காண் முறைச் சூத்திரங்கள் (A general quadrature formula for equi distant ordinates) நியூட்டன், ஸ்டர்லிங், பெஸ்ஸல் ஆகிய இடைச்செருகல் சூத்திரங்களில் x-ஐயும் u-ஐயும் கொடுக்கும் தொடர்பு $x = x_0 + hu$ ... (7.1) ஆகும்.

இதிலிருந்து $dx = h\,du$. இதில் h என்பது சம இடைவெளித் தூரமாகும்.

இப்பொழுது நியூட்டனின் சூத்திரத்தை n சம இடைவெளிகளுக்கு (R என்ற இடைவெளி) தொகைப்படுத்துவோம்.

x-க்கான தொகையீட்டின் எல்லைகள் (limits of integration) x_0-லிருந்து $x_0 + nh$ வரையாகும். எனவே, (1)-லிருந்து u-க்கு ஏற்ற முறையான எல்லைகள் 0-லிருந்து n வரையாகும்.

$$\therefore \int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx = h \int_0^n \Big(y_0 + u\,\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

$$+ \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$+ \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

$$+ \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)(u-4)}{5!}\Delta^5 y_0$$

$$+ \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)(u-4)(u-5)}{6!}\Delta^6 y_0$$

$$+ \cdots\cdots\cdots \Big)\,du$$

அல்லது

$$\int_{x_0}^{x_0+h} y\,d_x = h\Big[ny_0 + \frac{n^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}\right)\frac{\Delta^2 y_0}{2}$$

$$+ \left(\frac{n^4}{4} - n^3 + n^2\right)\frac{\Delta^3 y_0}{3!} + \left(\frac{n^5}{5} - \frac{3n^4}{2} + \frac{11n^3}{3} - 3n^2\right)\frac{\Delta^4 y_0}{4!}$$

$$+ \left(\frac{n^6}{6} - 2n^5 + \frac{35n^4}{4} - \frac{50n^3}{3} + 12n^2\right)\frac{\Delta^5 y_0}{5!}$$

$$+ \left(\frac{n^7}{7} - \frac{15n^6}{6} + 17n^5 - \frac{225n^4}{4} + \frac{274n^3}{3} - 60n^2\right)\frac{\Delta^6 y_0}{6!}\Big] \quad \text{— (7.2)}$$

இது பொதுவான பரப்புகாண் சூத்திரமாகும்.

(7·2)-ல் $n = 1, \; 2, \ldots\ldots$ எனப் பிரதியிட்டால் பல்வேறு வகைப்பட்ட பரப்புகாண் சூத்திரங்களைக் காணலாம். இவற்றில் $n=2$, $n=6$ என்று பிரதியிடப்பட்ட சூத்திரங்கள் மிகச் சிறந்தவையாகும்.

சரிவகம் சார்ந்த விதி (Trapezoidal rule)

(7·2)-ல் $n=1$ எனப் பிரதியிட்டு முதல் நிலைக்கு மேற்பட்ட உயர்நிலை வேறுபாடுகளைப் புறக்கணித்தால்,

$$\int_{x_0}^{x_0+h} y\,du = h\left[y_0 + \frac{\triangle y_0}{2}\right] = h\left[y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2}\right]$$

$$= h\left(\frac{y_0 + y_1}{2}\right)$$

இது போல் $\displaystyle\int_{x_0+h}^{x_0+2h} y\,d_x = h\,\frac{(y_1 + y_2)}{2}$

....

....

$$\int_{x_0+(n-1)h}^{x_0+nh} y\,d_x = h\,\frac{(y_{n-1} + y_n)}{2}$$

இந்த n தொகைகளைக் கூட்டினால்

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} y\,d_x = h\left[\frac{(y_0 + y_n)}{2} + (y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})\right]$$

இதற்குச் சரிவகம் சார்ந்த விதி என்று பெயர்.

சிம்ஸனின் விதி (Simpson's Rule)

(7·2)-ல் $n=2$ எனப் பிரதியிட்டு இரண்டாம் நிலை வேறுபாடுகளுக்கு மேற்பட்டவற்றைப் புறக்கணித்தால்,

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} y\,dx = h\left[2y_0 + 2\Delta y_0 + \left(\frac{8}{3} - 2\right)\frac{\Delta^2 y_0}{2}\right]$$

$$= h\left[2y_0 + 2y_1 - 2y_0 + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right]$$

அடுத்த இடைவெளியான $x_0 + 2h$-லிருந்து $x_0 + 4h$ வரை

$$\int_{x_0+2h}^{x_0+4h} y\,dx = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

வடிவொத்த முறையில் மூன்றும் இடைவெளியான $x_0 + 4h$-லிருந்து $x_0 + 6h$ வரை

$$\int_{x_0+4h}^{x_0+6h} y\,dx = \frac{h}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6)$$

என்று மேன்மேலும் அமைக்கலாம்.

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx = \int_{x_0}^{x_0+2h} y\,dx + \int_{x_0+2h}^{x_0+4h} y\,dx + \int_{x_0+4h}^{x_0+6h} y\,dx + \ldots\ldots + \int_{x_0+2(n-1)h}^{x_0+nh} y\,dx$$

n இரட்டைப்படை எண்ணாக இருக்கும்போது

$$= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2\,4y_3 + y_4 + 4y_5 + y_6 + \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

$$= \frac{h}{3}\Big[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + \dots\dots + y_{n-2}) + y_n \Big]$$

$$= \frac{h}{3}\Big[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots\dots + y_{n-2}) \Big]$$

இதற்கு சிம்ஸனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதியென்று பெயர்.

(7·2)-ல் $n = 3$ என்று பிரதியிட்டு மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகளுக்கு மேற்பட்ட உயர்நிலை வேறுபாடுகளைப் புறக்கணித்தால்,

$$\int_{x_0}^{x_0+3h} y d_x = h\Big[3y_0 + \tfrac{9}{2}(y_1 - y_0) + \tfrac{9}{4}(y_2 - 2y_1 + y_0) + \tfrac{3}{8}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) \Big]$$

$$= \tfrac{3}{8} h [y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3]$$

$$\int_{x_0+3h}^{x_0+6h} y d_x = \frac{3h}{8}\Big[y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6 \Big]$$

....

....

$$\int_{x_0+(n_{-1})3h}^{x_0+nh} y d_x = \frac{3h}{8}\Big[y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n \Big]$$

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} y d_x = \int_{x_0}^{x_0+3h} y d_x + \int_{x_0+3h}^{x_0+6h} y d_x + \dots\dots + \int_{x_0+3(n_{-1})h}^{x_0+nh} y d_x$$

$$= \frac{3}{8} h \, [y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6 + \ldots\ldots + y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + 3y_n]$$

$$= \frac{3}{8} h \, [(y_0 + y_n) + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \ldots\ldots + y_{n-1}) + 2(y_3 + y_6 + \ldots\ldots + y_{n-3})]$$

இது சிம்ஸனின் $\frac{3}{8}$ ஆவது தொகைச் சூத்திரமாகும்.

வெடிலின் விதி (Weddle's Rule)

(7·2) ல் $n = 6$ எனப் பிரதியிட்டு 6ஆம் நிலை வேறுபாடுகளுக்கு மேற்பட்ட உயர்நிலை வேறுபாடுகளைப் புறக்கணித்தால்,

$$\int_{x_0}^{x_0+6h} y\,dx = h\Big[6y_0 + 18\Delta y_0 + 27\Delta^2 y_0 + 24\Delta^3 y_0 + \frac{123}{10}\Delta^4 y_0 + \frac{33}{10}\Delta^5 y_0 + \frac{41}{140}\Delta^6 y_0\Big]$$

இதில் $\Delta^6 y_0$ன் கெழு $\frac{3}{10}$ க்கு $\frac{1}{140}$ குறைவாயுள்ளது.

எனவே, இந்தக் கெழுவை $\frac{3}{10}$ எனக் கொள்வதனால் ஏற்படும் பிழை $\frac{h}{140} \Delta^6 y_0$ ஆகும்.

6ஆம் நிலை வேறுபாடுகளின் மதிப்பு மிகமிகக் குறைவாயிருப்பதால், மேலே மேற்கொண்ட மாற்றத்தினால் ஏற்படும் பிழை புறக்கணிக்கக்கூடிய அளவு சிறியதாயிருக்கும். எனவே, கடைசி உறுப்பை $\frac{3}{10} \Delta^6 y_0$ என மாற்றினால்,

$$\int_{x_0}^{x_0+6h} y\,dx = h\Big[6y_0 + 18\Delta y_0 + 27\Delta^2 y_0 + 24\Delta^3 y_0 + \frac{123}{10}\Delta^4 y_0 + \frac{33}{10}\Delta^5 y_0 + \frac{3}{10}\Delta^6 y_0\Big]$$

$$= \frac{3h}{10}\Big[y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + y_6\Big]$$

இம் மாதிரியே

$$\int_{x_0+6h}^{x_0+12h} ydx = \frac{3}{10}h\left[gy_6 + 5y_7 + y_8 + 6y_9 + y_{10} + 5y_{11} + y_{12}\right]$$

....

$$\int_{x_0+(n-6)h}^{x_0+nh} ydx = \frac{3h}{10}\left[y_{n-6} + 5y_{n-5} + y_{n-4} + 6y_{n-3} + y_{n-2} + 5y_{n-1} + y_n\right]$$

n என்பது 6ன் மடங்காகும்.

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} ydx = \frac{3h}{10}\left[y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + 2y_6 + 5y_7 + y_8 + 6y_9 + y_{10} + 5y_{11} + 2y_{12} + \cdots + 2y_{n-6} + 5y_{n-5} + y_{n-4} + 6y_{n-3} + y_{n-2} + 5y_{n-1} + y_n\right]$$

ஆகும்.

இதற்கு வெடிலின் விதி என்று பெயர். இவ் விதியை, ஸ்டர்லிங்கின் இடைச் செருகல் சூத்திரத்தை வரையறைக்குள் தொகைப்படுத்தியும் பெறலாம். இது சிம்ஸனின் விதியைவிட மிகத் துல்லியமானது.

மாதிரி 1 ;

$I = \int_{4}^{5.2} \log_e x\, dx$ என்ற வரையறுத்த தொகையின் மதிப்பினைச் சிம்ஸனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதியின் மூலமாகவும், வெடிலின் விதி மூலமாகவும் காண்க.

தொகைக்கான இடைவெளியை $n = 6$ சமப்பிரிவுகளாக 0·2 என்ற இடைவெளியில் பிரிக்கின்றோம்.

எனவே, $h=0{\cdot}2$, $y=\log_e x$-ன் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்துகின்றோம்.

x	$\log_e x$
4·0	1·38629436
4·2	1·43508453
4·4	1·48160454
4·6	1·52605630
4·8	1·56861592
5·0	1·60943791
5·2	1·64865863

(a) சிம்ஸன் $\frac{1}{3}$ விதியாவது

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx = \frac{h}{3}\Big[(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+\ldots\ldots+y_{n-1}) + 2(y_2+y_4+\ldots\ldots+y_{n-2})\Big]$$

$$\Rightarrow \int_{4\cdot 0}^{4\cdot 0+6(0\cdot 2)} \log_e x\,dx = \frac{0\cdot 2}{3}\big[1{\cdot}38629436+1{\cdot}64865863 + 4(1{\cdot}43508453+1{\cdot}52605630+1{\cdot}60943791) + 2(1{\cdot}48160454+1{\cdot}56861592)\big]$$

$$= \frac{0\cdot 2}{3}\left[3{\cdot}03495299 + 4(4{\cdot}57057874) + 2(3{\cdot}05022046)\right]$$

$$= 1{\cdot}82784726$$

(b) வெடிலின் விதியாவது,

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx = \frac{3h}{10}\big[y_0+5y_1+y_2+6y_3+y_4+5y_5+2y_6 + 5y_7+y_8+6y_9+y_{10}+5y_{11}+2y_{12}+\ldots\ldots+2y_{n-6}+5y_{n-5}+y_{n-4}+6y_{n-3} + y_{n-2}+5y_{n-1}+y_n\big]$$

$$\Rightarrow \int_{4\cdot 0}^{4\cdot 0 + 6(0\cdot 2)} \log_e x\,dx = \frac{3\,(0\cdot 2)}{10}\,[\,1\cdot 38629436 + 5\,(1\cdot 43508453)$$

$$+ 6\,(1\cdot 5260563)) + 1\cdot 56861592$$

$$+ 5\,(1\cdot 60943791) + 5(1\cdot 60943791)$$

$$+ 2\,(1\cdot 64865863)\,]$$

$$= (0\cdot 3)\;(0\cdot 2)\,[\,3\cdot 03495299 + 5\,(3\cdot 04452244) + 3\cdot 05022046$$

$$+ 6\,(1\cdot 52605630)\,]$$

$$= 1\cdot 82784741$$

தொகையின் உண்மையான மதிப்பு

$$I = \int_{4}^{5\cdot 2} \log_e x\,dx = [\,x\,(\log_e x - 1)\,]_{4\cdot 0}^{5\cdot 2}$$

$$= 1\cdot 8278471$$

எனவே பிழைகளாவன:

சிம்ஸன் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதியில் $= 0\cdot 00000015 = 15 \times 10^{-6}$

வெடிலின் விதியில் $= 0$

மாதிரி :

$$I = \int_{0\cdot 2}^{1\cdot 4} (\sin x - \log_e x + e^x)\;dx$$

என்ற வகையறுத்த தொகையின் மதிப்பை

(i) சிம்ஸனின் விதிகள்

(ii) வெடிலின் விதி

(iii) சரிவகம் சார்ந்த விதி

ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

தொகைக்கான இடைவெளியை 12 சம இடைவெளிகளாக $h = 0\cdot 1$ என்று கொண்டு $y = (\sin x - \log_e x + e^x)$ என்ற சாரியின் மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

x	y
0·2	3·02951
0·3	2·84936
0·4	2·79754
0·5	2·82130
0·6	2·89759
0·7	3·01465
0·8	3·16605
0·9	3·34830
1·0	3·55975
1·1	3·80007
1·2	4·06984
1·3	4·37050
1·4	4·70418

(i) சிம்ஸனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதியின்படி

$$I = \int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx = \frac{h}{3}\Big[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + \cdots) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots\cdots)\Big]$$

$$= \int_{0\cdot2}^{0\cdot2+12(0\cdot1)} (\sin x - \log_e x + e^x)\,dx$$

$$= \frac{0\cdot1}{3}\Big[3\cdot02951 + 4\cdot70418 + 4(20\cdot20418) + 2(16\cdot49077)\Big]$$

$$I = 4\cdot05106$$

சிம்ஸனின் $\frac{3}{8}$ ஆவது விதியின்படி

$$I = \int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx = \frac{3h}{8}\Big[(y_0 + y_n) + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_3 + y_6 + \cdots + y_{n-3})\Big]$$

$$= \int_{0.2}^{0.2+12(0.1)} (\sin x - \log e^{x} + e^{x})\, dx$$

$$= \frac{3(0.1)}{8} [(3.(2951 + 4.70418) + 2 (2.8213 + 3.16605 + 3.8.0017) + 3 (2.84936 + 2.79754 + 2.89759 + 3.01465 + 3.34830 + 3.55975 + 4.06981 + 4.370.0)]$$

$$I = 4.0512$$

(ii) வெடிலின் விதியின்படி

$$I = \int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx = \tfrac{3}{10} h [y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + 2y_6 + 5y_7 + y_8 + 6y_9 + y_{10} + 5y_{11} + 2y_{12} + \ldots + 2y_{n-6} + 5y_{n-5} + y_{n-4} + 6y_{n-3} + y_{n-2} + 5y_{n-1} + yn]$$

$$= \int_{0.2}^{0.2+12(0.1)} \left(\sin x - \log_e{}^{x} + x \right) dx$$

$$= 0.3 \; [21.0.841 + 5(13.58281) + 6(6.62137) + 2(3.16605)]$$

$$= 4.05098$$

(iii) சரிவகம் சார்ந்த விதி

$$I = \int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx = h \left[\frac{(y_0+y_n)}{2} + (y_1+y_2+\ldots\ldots+y_{n-1}) \right]$$

$$= \int_{0\cdot 2}^{0\cdot 2+12(0\cdot 1)} (\sin x - \log_e x + e^x)\, dx = 0\cdot 1 \Big[\Big(\frac{3\cdot 02951 + 4\cdot 70418)}{2} + (2\cdot 84936 + 2\cdot 79754 + 2\cdot 82130 + 2\cdot 89759$$

$$+ 3\cdot 01465 + 3\cdot 16605 + 3\cdot 34830 + 3\cdot 55975 + 3\cdot 80007$$

$$+ 4\cdot 06984 + 4\cdot 37050) \Big]$$

$$I = 4\cdot 05680$$

தொகையின் உண்மையான மதிப்பு,

$$I = \int_{0\cdot 2}^{1\cdot 4} (\sin x - \log_e x + e^x)\, dx$$

$$= \big[-\cos x - x(\log_e x - 1) + e^x \big]_{0\cdot 2}^{1\cdot 4}$$

$$= 4\cdot 05095$$

பிழைகள் :

சிம்ஸனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதியில்	=	$-$ 0 00011
சிம்ஸனின் $\frac{3}{8}$ ஆவது விதியில்	=	$-$ 0·0013
வெடிலின் விதியில்	=	$-$ 0·00003
சரிவகம் சார்ந்த விதியில்	=	$-$ 0·00523

மைய வேறுபாட்டுப் பரப்புகாண் முறைச் சூத்திரங்கள் (Central Difference Qudrature Formulae)

ஸ்டர்லிங், பெஸ்ஸல் ஆகிய இடைச் செருகல் சூத்திரங்களைத் தொகையிடுவதால் துரிதமாக ஒருங்கும் (rapidly converging) பரப்புகாண் முறைச் சூத்திரங்களை வேறுபாடுகளின்மூலம் வருவிக்க முடியும்.

$x = (x_0 - h)$லிருந்து $x = (x_0 + h)$ வரை அல்லது $u = -1$-லிருந்து $u = +1$ வரை 'ஸ்டர்லிங்'கின் சூத்திரத்தைத் தொகையீடு செய்தால்,

$$I = \int_{-h}^{h} \phi(x)\,dx = h \int_{-1}^{1} \Big[y_0 + u \frac{(\Delta y_{-1} + \Delta y_0)}{2} + \frac{u^2}{2} \Delta^2 y_{-1}$$

$$+ \frac{u(u^2-1)}{3!} \frac{(\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1})}{2}$$

$$+ \frac{u^2(u^2-1)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \frac{u(u^2-1)(u^2-4)}{5!} \frac{(\Delta^5 y_{-2} + \Delta^5 y_{-1})}{2}$$

$$+ \frac{u^2(u^2-1)}{4!} \Delta^4 y_{-2}$$

$$+ \frac{u^2(u^2-1)(u^2-4)}{5!} \frac{(\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2})}{2}$$

$$+ \frac{u^2(u^2-1)(u^2-4)}{6!} \Delta^6 y_{-3} + \ldots\ldots \Big] d_u$$

$$= h \left[2y_0 + \frac{1}{3} \Delta^2 y_{-1} + \frac{2}{24} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) \Delta^4 y_{-2} \right.$$

$$\left. + \frac{2}{720} \left(\frac{1}{7} - 1 + \frac{4}{3} \right) \Delta^6 y_{-3} + \ldots \right]$$

$$= 2h \left[y_0 + \frac{1}{6} \Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{180} \Delta^4 y_{-2} + \frac{1}{1512} \Delta^6 y_{-3} + \ldots \right]$$

இந்த சூத்திரம் தொகையின் மதிப்பை $x = (x_0 - h)$-லிருந்து $x = x_0 + h$ வரை தோராயமாக அளிக்கிறது.

இப்பொழுது y-ன் கீழ்க்குறி (subscript)களை 1 அலகுக்கு முன்னேற்றினால் (advancing by one unit) தொகையின் மதிப்பை $x = x_0$-லிருந்து $x = x_0 + 2h$ வரை காண்கிறோம். இதனை I_0^2 எனக்குறித்தால்,

$$I_0^2 = 2h \left[y_1 + \frac{1}{6} \Delta^2 y_0 - \frac{1}{180} \Delta^4 y_{-1} + \frac{1}{1512} \Delta^6 y_{-2} \right]$$

இம்மாதிரியே கீழ்க்காணும் தொகைகளும் அமைகின்றன.

$$I_2^4 = 2h \left[y_3 + \frac{1}{6} \Delta^2 y_2 - \frac{1}{180} \Delta^4 y_1 + \frac{1}{1512} \Delta^6 y_0 \right]$$

$$I_4^6 = 2h\left[y_5 + \frac{1}{6}\Delta^2 y_4 - \frac{1}{180}\Delta^4 y_3 + \frac{1}{1512}\Delta^6 y_2\right],$$

....

$$I_{n-2}^{n} = 2h\left[y_{n-1} + \tfrac{1}{6}\Delta^2 y_{n-2} - \tfrac{1}{180}\Delta^4 y_{n-3} + \tfrac{1}{1512}\Delta^6 y_{n-4}\right]$$

மேலுள்ள தனித்தனி தொகைகளை மொத்தமாகக் கூட்டினால்,

$$\begin{aligned} I_0^n = 2h\Big[& y_1 + y_3 + y_5 + \dots\dots + y_{n-1} \\ & + \tfrac{1}{6}(\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_2 + \dots\dots + \Delta^2 y_{n-2}) \\ & - \tfrac{1}{180}(\Delta^4 y_{-1} + \Delta^4 y_1 + \Delta^4 y_3 + \dots\dots \\ & \qquad + \Delta^4 y_{n-3}) \\ & + \tfrac{1}{1512}(\Delta^6 y_{-2} + \Delta^6 y_0 + \Delta^6 y_2 + \dots\dots \\ & \qquad + \Delta^6 y_{n-4})\Big] \end{aligned} \quad 7{\cdot}3$$

இஃது ஒரு மைய வேறுபாட்டுப் பரப்பு காண் முறைச் சூத்திரமாகும்.

இதில்,

$$I_0^n = \int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx,$$ n என்பது இரட்டைப்படை எண்ணாகும்.

இப்பொழுது பெஸ்ஸலின் சூத்திரத்தை $x = x_0$ விருந்து $x = x_0 + h$ வரை அல்லது $v = -\frac{1}{2}$ லிருந்து $v = \frac{1}{2}$ வரை தொகையிடு செய்தால்,

$$I_0' = \int_{x_0}^{x_0+h} \phi(x)\,dx = h\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\Big[\frac{y_0 + y_1}{2} + V\Delta y_0$$

$$+ \frac{(v^2 - \frac{1}{4})}{2}\,\frac{(\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0)}{2}$$

$$+ \frac{v(v^2 - \frac{1}{4})\,\Delta^3 y_{-1}}{3\,!} + \frac{(v^2 - \frac{1}{4})(v^2 - \frac{9}{4})}{4\,!}$$

$$\left(\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2}\right)$$

$$+ \; v\left(v^2 - \tfrac{1}{4}\right)\left(v^2 - \tfrac{9}{4}\right) \Delta^5 y_{-3}$$

$$+ \; \frac{\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)\left(v^2 - \frac{9}{4}\right)\left(v^2 - \frac{25}{4}\right)}{6!} \; \frac{\left(\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}\right)}{2}$$

$$+ \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big] \, dv$$

$$= h \left[\frac{y_0 + y_1}{2} - \frac{1}{12} \, \frac{(\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0)}{2} \right.$$

$$+ \; \frac{11}{720} \, \frac{(\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1})}{2}$$

$$\left. - \; \frac{191}{60480} \, \frac{(\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2})}{2} \right]$$

y-ன் கீழ்க் குறிகளை (subscripts) 1 அலகுக்கு முன்னேற்றிக் கீழ்க் காணும் தொகைகளை அமைக்கிறோம்.

$$I_1^2 = h \left[\frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{1}{12} \, \frac{(\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1)}{2} \right.$$

$$+ \; \frac{11}{720} \, \frac{(\Delta^4 y_{-1} + \Delta^4 y_0)}{2}$$

$$\left. - \; \frac{191}{60480} \, \frac{(\Delta^6 y_2 + \Delta^6 y_{-1})}{2} \right],$$

$$I_2^3 = h \left[\frac{y_2 + y_3}{2} - \frac{1}{12} \, \frac{(\Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2)}{2} \right.$$

$$+ \; \frac{11}{720} \, \frac{(\Delta^4 y_0 + \Delta^4 y_1)}{2}$$

$$- \; \frac{191}{60480} \left[\frac{(\Delta^6 y_{-1} + \Delta^6 y_0)}{2} \right]$$

....

....

$$I_{n-1}^{n} = h \left[\frac{y_{n-1} + y_n}{2} - \frac{1}{12} \, \frac{(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_{n-1})}{2} \right.$$

$$\left. + \; \frac{11}{720} \, \frac{(\Delta^4 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-2})}{2} - \frac{191}{60480} \, (\Delta^6 y_{n-4} + \Delta^6 y_{n-3}) \right]$$

மேலுள்ள தனித்தனி தொகைகளை மொத்தமாகக் கூட்டினால்

$$
\begin{aligned}
I_0^n = h \Big[& \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots\dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) \\
& - \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2} + \Delta^2 y_0 \; \Delta^2 y_1 + \dots\dots\dots \right. \\
& \left. + \Delta^2 y_{n-2} + \frac{\Delta^2 y_{n-1}}{2} \right) \\
& + \frac{11}{720} \left(\frac{\Delta^4 y_{-2}}{2} + \Delta^4 y_{-1} + \Delta^4 y_0 + \dots\dots \right. \\
& \left. + \Delta^4 y_{n-3} + \frac{\Delta^4 y_{n-2}}{2} \right) \\
& - \frac{191}{6048} \left(\frac{\Delta^6 y_{-3}}{2} + \Delta^6 y_{-2} + \Delta^6 y_{-1} + \dots\dots \right. \\
& \left. + \Delta^6 y_{n-4} + \frac{\Delta^6 y_{n-3}}{2} \right) \Big] \qquad \dots\dots \quad (7\cdot4)
\end{aligned}
$$

இதில் n என்பது ஒற்றை அல்லது இரட்டைப்படை எண் களாகும்.

மேலுள்ள பரப்புகாண் முறைச் சூத்திரம் இதே நிலையிலிருந் தால் கணக்கீடு செய்வது கடினமாகும். எனவே (4)ல் கீழ்க்காணும் மாற்றங்களைச் செய்கிறோம்.

$$
\begin{aligned}
\Delta^2 y_{-1} &= \Delta y_0 - \Delta y_{-1} \\
\Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\Delta^2 y_{n-1} &= \Delta y_n - \Delta y_{n-1} \\
\Delta^4 y_{-2} &= \Delta^3 y_{-1} - \Delta^3 y_{-2} \\
\Delta^4 y_{-1} &= \Delta^3 y_0 - \Delta^3 y_{-1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\Delta^4 y_{n-2} &= \Delta^3 y_{n-1} - \Delta^3 y_{n-2} \\
\Delta^6 y_{-3} &= \Delta^5 y_{-2} - \Delta^5 y_{-3} \\
\Delta^6 y_{-2} &= \Delta^5 y_{-1} - \Delta^5 y_{-2} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

$\Delta^6 y_{n-3} = \Delta^5 y_{n-2} - \Delta^5 y_{n-3}$ என்று மேன்மேலும் கொண்டு (7·4)-ல் பிரதியிடக் கிடைப்பது,

$$I_0^n = h\Big[\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2}\right) - \frac{11}{720}\left(\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2}\right)$$

$$+ \frac{191}{60480}\left(\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2}\right) \frac{-1}{12}\left(\frac{\Delta y_{n-1} + \Delta y_n}{2}\right)$$

$$+ \frac{11}{720}\left(\frac{\Delta^3 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-1}}{2}\right) \frac{-191}{60480}\left(\frac{\Delta^5 y_{n-3} + \Delta^5 y_{n-2}}{2}\right)\Big],$$

$$= h\Big[\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

$$- \frac{1}{12}\left(\frac{\Delta y_{n-1} + \Delta y_n}{2} - \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2}\right)$$

$$+ \frac{11}{720}\left(\frac{\Delta^3 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-1}}{2}\right) - \left(\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2}\right)$$

$$\frac{-191}{60480}\left(\frac{\Delta^5 y_{n-3} + \Delta^5 y_{n-2}}{2} - \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2}\right)\Big]$$

இச் சூத்திரம் (7·4) ஆம் சூத்திரத்தை ஒத்திருக்கிறது.

மாதிரி :

மைய வேறுபாட்டுப் பரப்புகாண் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி π-ன் மதிப்பைக் கீழ்க்காணும் வகையறுத்த தொகையிலிருந்து காண்க.

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$$

முதலில் $y = \frac{1}{1 + x^2}$ என்ற சார்பிற்கு $x = -0{\cdot}3$லிருந்து $x = 1{\cdot}3$ வரை $h = 0{\cdot}1$ என்று கொண்டு y-ன் மதிப்புகளையும் வேறுபாடுகளையும் அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
−0·3	0·9174312						
		441073					
−0·2	0·9615385		−155468				
		285605		−31127			
−0·1	0·9900990		−186595		19702		
		99010		−11425		3148	
0	1·0000000		−198020		22850		−6296
		−99010		11425		−3148	
0·1	0·9900990		−186595		19702		−4762
		−285605		31127		−7910	
0·2	0·9615385		−155468		11792		−1320
		−441073		42919		−9230	
0·3	0·9174312		−112549		2562		1886
		−553622		45481		−7344	
0·4	0·8620690		−67068		−4782		3323
		−620690		40699		−4021	
0·5	0·8000000		−26369		−8803		3085
		−647059		31896		−936	
0·6	0·7352941		5527		−9739		1983

		−641532		22157		1047	
0·7	0·6711409		27684		−8692		868
		−613848		13465		1915	
0·8	0·6097561		41149		−6777		86
		−572699		6688		2001	
0·9	0·5524862		47837		−4776		−299
		−524862		1912		1702	
1·0	0·5000000		49749		−3074		−416
		−475113		−1162		1286	
1·1	0·4524887		48587		−1788		
		−426526		−2950			
1·2	0·4098361		45637				
		−380889					
1·3	0·3717472						

ஸ்டர்லிங் சூத்திரத்தைத் தொகை செய்து பெறப்பட்ட பரப்புகாண் முறைச் சூத்திரமாவது,

$$I^n_0 = 2h\Big[(y_1+y_3+y_5+\dots\dots\dots+y_{n-1})$$

$$+\frac{1}{6}(\Delta^2y_0+\Delta^2y_2+\dots\dots+\Delta^2y_{n-2})$$

$$-\frac{1}{180}(\Delta^4y_{-1}+\Delta^4y_1+\Delta^4y_3+\dots\dots+\Delta^4y_{n-3})$$

$$+\frac{1}{1512}(\Delta^6y_{-2}+\Delta^6y_0+\Delta^6y_2+\dots\dots+\Delta^6y_{n-4})\Big]$$

வேறுபாடுகளையும் சார்பின் மதிப்புகளையும் மேலுள்ள அட்டவணையிலிருந்து பிரதியிட

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = 0\cdot2\Big[3\cdot9311573+\frac{1}{6}(-0\cdot0249992)-\frac{1}{180}(-0\cdot0000007)$$

$$+\frac{1}{1512}(0\cdot0000778)\Big]$$

$$= 0\cdot78539816$$

$$\therefore \pi = 4\,(0\cdot78539816)$$

$$\pi = 3\cdot14159264$$

பெஸ்ஸலின் சூத்திரத்தைத் தொகை செய்து பெறப்பட்ட பரப்புக்காண் முறைச் சூத்திரமாவது,

$$I^n_0 = h\Big[\Big(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\dots\dots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\Big)$$

$$-\frac{1}{12}\Big(\frac{\Delta y_{n-1}+\Delta y_n}{2}-\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}\Big)$$

$$+\frac{11}{720}\Big(\frac{\Delta^3y_{n-2}+\Delta^3y_{n-1}}{2}-\frac{\Delta^3y_{-2}+\Delta^3y_{-1}}{2}\Big)$$

$$- \frac{191}{60480} \left(\frac{\Delta^6 y_{n-3} + \Delta^6 y_{n-2}}{2} - \frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} \right) \Bigg]$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = 0{\cdot}1 \Big[7{\cdot}8498150 - \frac{1}{12} (-0{\cdot}0499988)$$

$$+ \frac{11}{720} (0{\cdot}0000375)$$

$$- \frac{191}{60480} (0{\cdot}0001494) \Big]$$

$$= 0{\cdot}78539817$$

$$\therefore \quad \pi = 3{\cdot}14159268$$

‘காஸ்’ஸின் பரப்புக் காண் முறைச் சூத்திரம் (Gauss's Quadrature Formula)

இச் சூத்திரத்தில் (a, b) என்ற இடைவெளியைச் சம இடைவெளிகளாகப் பிரிக்காமல் அசம, ஆனால் சமச்சீருள்ளதாக (symmetrical) மையத்திலிருந்து அமைந்த இடைவெளிகளாகக் கொண்டு தொகையைக் கணக்கிடுகின்றோம். இவ்வாறு அசம இடைவெளிகளுடன் தொகையீடு செய்தால், தொகையின் மதிப்பு மிகத் துல்லியமாக இருப்பதைக் காணலாம். இதுவே ‘காஸ்’ சூத்திரத்தின் சிறப்பாகும். இது மற்றெல்லாப் பரப்புகாண் முறைச் சூத்திரங்களைவிட மிகத் துல்லியமான விடையைக், கொடுக்கிறது.

$$I = \int_a^b y\,dx$$ என்ற வரையறுத்த தொகையைக் கருதுக.

இதில், $y = f(x)$

மாறி x-க்கு $u = (b-a)\,u + \frac{(a+b)}{2}$ என்ற பிரதியீடு செய்தால்

தொகையின் எல்லைகள் $-\frac{1}{2}$ லிருந்து $+\frac{1}{2}$ வரை அமையும்,

இப்பொழுது y-ன் மதிப்பு,

$$y = y(x) = f\left[(b-a)\,u + \frac{(a+b)}{2} \right] = \phi\,(u)$$

என்றாகிறது.

ஆனால், $dx = (b-a)$ என்பதால்,

$$\text{தொகை } I = (b-a)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \phi(u)\, du$$

இங்கு நாம் காங்கின் சூத்திரத்தை வருவிக்கப் போவதில்லை ஆனால், 'காஸ்'ஸின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தித் தொகைகளைக் கணக்கிடுவதைக் காண்போம்.

'காஸ்'ஸின் சூத்திரமாவது,

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \phi(u)\, du = R_1\,\phi(u_1) + R_2\,\phi(u_2) + \ldots + R_n\,\phi(u_n)$$

இதில், $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$ என்பவை $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ என்ற இடைவெளியின் பிரிவுகளாகும். இவற்றுக்கு x-ன் முறையான மதிப்புகள்,

$$x_1 = (b-a)\,u_1 + \frac{(a+b)}{2}$$

$$x_2 = (b-a)\,u_2 + \frac{(a+b)}{2}$$

என்று மேன்மேலும் கொள்ளலாம்.

எனவே, தொகையின் மதிப்பு,

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = (b-a)\;[\,R_1\,\phi(u_1) + R_2\,\phi(u_2) + \ldots + R_n\,\phi(u_n)\,]$$

கீழே u_i-க்கு ஏற்ற R_i களின் மதிப்புகள் $(i = 1, 2, \ldots n)$; n-ன் மதிப்புகளுக்கு அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

n	u	R
$n=2$	$u\pm_1 = 0{\cdot}2886751346$	$R = \frac{1}{2}$
$n=3$	$u_0 = 0$	$R = \frac{4}{9}$

	$u_{\pm 1} = 0{\cdot}3872983346$		$R = \frac{5}{18}$
$n = 4$	$u_{\pm 1} = 0{\cdot}1699905218$		$R = 0{\cdot}3260725774$
	$u_{\pm 2} = 0{\cdot}4305681558$		$R = 0{\cdot}1739274226$
$n = 5$	$u_0 \quad 0$		$R = \frac{64}{225}$
	$u_{\pm 1} = 0{\cdot}2692346551$		$R = 0{\cdot}2393143352$
	$u_{\pm 2} = 0{\cdot}4530899230$		$R = 0{\cdot}1184634425$

$n = 6, 7, 8, 9, 10$............ ஆகியவற்றுக்கான u, R ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை 1 - 16 படிகளுக்கு லெஜண்டிரே பல்லுறுப்புக் கோவைக்கான பூச்சியங்களின அட்டவணையிலிருந்தும் (Table of the zeros of the Legender polynomials of order 1 – 16) காஸ்ஸின் பொறி முறையான, பரப்புகாண் முறைச் சூத்திரத்திற்கான நிறையிட்ட கெழு அட்டவணையிலிருந்தும் (Table of the weight coefficients for Gauss's Mechanical Qudhrature Formula) பெறலாம்.

மாதிரி:

காஸ்ஸின் பரப்புகாண் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி

$$I = \int_5^{12} \frac{dx}{x}$$ -ன் மதிப்பினைக் காண்க.

$$I = \int_5^{12} \frac{dx}{x} \quad \text{இங்கு } a = 5,\ b = 5$$

$$x = (b - a)\,u + \frac{(a + b)}{2}$$

ஃ $x = 7u + 8{\cdot}5$

$$y = \frac{1}{x} = \frac{1}{7u + 8{\cdot}5}$$

$n = 5$ எனக் கொள்க.

$$y_0 = \phi(u_0) = \frac{1}{8 \cdot 5} = 0 \cdot 117647059$$

$$y_1 = \phi(u_1) = \frac{1}{7u_1 + 8 \cdot 5} = \frac{1}{10 \cdot 384)426} = 0 \cdot 096296)439$$

$$y_{-1} = \phi(u_{-1}) = \frac{1}{7u_2 + 8 \cdot 5} = \frac{1}{11 \cdot 67.6 _946} = 0 \cdot (856778399$$

$$y_{-2} = \phi(u_{-2}) = \frac{1}{7u_{-2} + 8 \cdot 5} = \frac{1}{5 \cdot 3_837054} = (\cdot 87674636$$

அட்டவணையிலிருந்து $n = 5$-க்கு

u_0, $u_{\pm 1}$, $u_{\pm 2}$-க்கான R-களின் மதிப்புகள் முறையே

$\frac{64}{225}$, 0·2393143452, 0·1184634425

$$I = (b-a)\{R_0 \phi(u_0) + R_1 [\phi(u-1) + \phi(u_1)] + R_2 [\phi(u-2) + \phi(u_2)]$$

$$= (12-5)\left\{\frac{64}{225} \times 0 \cdot 117647059\right.$$

$$+ (0 \cdot 2393143352) [0 \cdot 151163412 + 0 \cdot 0962960439]$$

$$\left. + (0 \cdot 1.8 \cdot 634425) [0 \cdot 18767463 + 0 \cdot 856778399) \right\}$$

$$I = 0 \cdot 87546 \cdot 458$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொகையின் உண்மையான மதிப்பு

$$= \int_5^{12} \frac{dx}{x} = \log_e \frac{12}{5} = 0 \cdot 875468737$$

பிழை = 0 00000028

ஆய்லர்-மக்லாரின் சூத்திரம் (Euler-Maclaurin's Fomula) :

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\ dx$$ என்ற வகையறுத்த தொகையை

$y=f(x)$ என்ற வளைகோட்டிற்கும், $x=x_0$, $x=x_0+nh$ என்ற நிலைத்தூரங்களுக்கும், (ordinates) x அச்சிற்குமிடையேயுள்ள பரப்பளவாகக் கருதுக.

D, C என்பவை வளைகோட்டில் x_0, x_0+nh என்ற கிடைத் தூரங்களைப் (abscessa) பெற்ற புள்ளிகளாகட்டும். அதனால் நமக்கு வேண்டிய பரப்பளவு ABCD என்றாகும். AB என்ற அடிப்பாகத்தை (base) n சமப்பிரிவுகளாகப் பிரி. ஒவ்வொரு பிரிவும் h என்ற நீளத்தைப் பெற்று x அச்சில் L, M, ... என்ற இடங்களிலும் அதற்கேற்றாற்போல் வளைகோட்டில் P, Q, ... என்ற இடங்களிலும் பிரிக்கப்படட்டும். ALPD என்ற நாற்கரத்தின் (Quadrilateral) பரப்பு

$$\tfrac{1}{2} h \left[yx_0 + yx_{0+h} \right]$$

LMQD என்ற நாற்கரத்தின் பரப்பு,

$$= \tfrac{1}{2} h \left[yx_{0+h} + yx_{0+2h} \right]$$

என்று மேன்மேலும் கொள்க

$$\therefore \text{ABCD-ன் பரப்பு} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\ dx$$

$$= \tfrac{1}{2} yx_0 + yx_{0+h} + yx_{0+2h} + \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots + yx_{0+(h-1)} + \tfrac{1}{2} yx_{0+nh} + c \qquad \dots\dots \qquad (7\cdot5)$$

இங்கு c என்பது திருத்தங்களின் உறுப்பாகும்.

$y = e^{mx}$ என்ற வகையைக் (case) கருதுக.

இதில் m என்பது ஒரு மாறிலி ஆகும்.

$$\therefore \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+nh} e^{mx}\,dx = \frac{1}{2}e^{mx_0} + e^{m(x_0+h)} + e^{m(x_0+2h)} + \ldots\ldots$$

$$+ e^{m(x_0+(n-1)h)} + \tfrac{1}{2}e^{m(x_0+nh)}$$

$$= \left[e^{mx_0} + e^{m(x_0+h)} + e^{m(x_0+2h)} + \ldots\ldots + e^{m(x_0+nh)}\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{2}\,e^{m(x_0+nh)} - e^{mx_0}\right] + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{mh}\left[e^{m(x_0+nh)} - e^{mx_0}\right]$$

$$= e^{mx_0}\left[\frac{e^{nmh}-1}{e^{mh}-1}\right] + \tfrac{1}{2}e^{mx_0}\left(e^{mnh}-1\right) + C$$

$$\Rightarrow C = e^{mx_0}\left(e^{mnh}-1\right)\left[\frac{1}{mh} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{mh}-1}\right]$$

ஆனால் $\frac{1}{e^{mh}-1} = \frac{1}{mh} - \frac{1}{2} + \frac{mh}{12} - \frac{(mh)^3}{720} + \frac{(mh)^5}{30240}\ \ldots\ldots$

இதனை மேலுள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டால்,

$$C = e^{mx_0}\left(e^{mnh}-1\right)\left[-\frac{mh}{2} + \frac{(mh)^3}{720} - \frac{(mh)^5}{30240} + \ldots\ldots\right]$$

C-ன் மதிப்பை வகையீட்டுக் கெழுக்களாக எழுதலாம்

$$y = f(x) = e^{mx}$$

$$\Rightarrow = f'(x) = me^{mx}$$

$$\therefore \left[f'(x)\right]_{x_0}^{x_0+nh} = m\left[e^{mx_0}\left(e^{mnh}-1\right)\right]$$

மேலும், $f'''(x) = m^3 e^{mx}$

$$\therefore \left[f'''(x)\right]_{x_0}^{x_0+nh} = m^3\left[e^{mx_0}\left(e^{mnh}-1\right)\right]$$

இச் சமன்பாடுகளின் வலப்பக்க மதிப்புகளுக்கு C-ல் பிரதியிட்டால்.

$$C = \frac{-h}{12}\left[f'(x_0+nh)-f'(x_0)\right]$$

$$+\frac{h^3}{720}\left[f'''(x_0+nh)-f'''(x_0)\right]$$

$$-\frac{h^5}{30240}\left[f^{(v)}(x_0+nh)-f^{(v)}(x_0)\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots$$

இதனை, (7·5) ல் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \Big[\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_0+h)+\ldots+f(x_0+\overline{n-1}\,h)$$

$$+\frac{1}{2}f(x_0+nh)\Big]$$

$$-\frac{h}{2}\left[f'(x_0+nh)-f'(x_0)\right]$$

$$+\frac{h^3}{720}\left[f'''(x_0+nh)-f'''(x_0)\right]$$

$$-\frac{h^5}{30240}\left[f^{(v)}(x_0+nh)-f^{(v)}(x_0)\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots$$

இதுவே ஆய்லர்-மக்லாரின் தொகைச் சூத்திரமாகும்

மாதிரி : ஆய்லர் - மக்லாரின் தொகைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி π-ன் மதிப்பைக் கீழ்க்காணும் தொகையிலிருந்து பெறுக.

$$\pi/4 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

இதில் $h = \frac{1}{6}$ என்று கொண்டு $y = \frac{1}{1+x^2}$ என்ற சார்பின் மதிப்புகளை 0 லிருந்து 1 வரை அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

x	y
0	1
$\frac{1}{6}$	0·97297297
$\frac{1}{3}$	0·9
$\frac{1}{2}$	0·8
$\frac{2}{3}$	0·69230769
$\frac{5}{6}$	0·59(16397
1	0·5

இப்பொழுது $\frac{1}{1+x^2}$ ன் வகைக் கெழுக்களைக் காண்போம்.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f^1(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)4}$$

$$f^{(v)}(x) = \frac{240^x}{(1+x^2)^6}\left[10x^2 - 3x^4 - 3\right]$$

எனவே,
$$f'(0) = 0, \quad f'(1) = -\tfrac{1}{2}$$
$$f'''(0) = 0, \quad f'''(1) = 0$$
$$f^{(v)}(0) = 0, \quad f^{(v)}(1) = 15$$

ஆய்லர் — மக்லாரின் சூத்திரமாவது,

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \left[\tfrac{1}{2}f(x_0) + f(x_0+h) + \cdots + f(x_0 + \overline{n-1}\,h) + \tfrac{1}{2}f(x_0+nh)\right]$$

$$-\frac{h}{12}\left[f'(x_0+nh) - f'(x_0)\right]$$

$$+\frac{h^3}{720}\left[f'''(x_0+nh) - f'''(x_0)\right]$$

$$-\frac{h^5}{30240}\left[f^{(v)}(x_0+nh) - f^{(v)}(x_0)\right]$$

$$+ \cdots\cdots\cdots$$

$$\Rightarrow 6\int_0^{0+6(\frac{1}{6})} \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\,0{\cdot}75 + 0{\cdot}97297297 + 0{\cdot}9 + 0{\cdot}8 + 0{\cdot}69230769 + 0.59016393\,]$$

$$-\frac{1}{72}\left[-\tfrac{1}{2}\right] + \frac{1}{(6)^3\,(720)}[0]$$

$$-\frac{1}{(6)^5\,(30240)}\,[15]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = 0{\cdot}78539816$$

ஆனால் $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$

எனவே, $\frac{\pi}{4} = 0{\cdot}78539816$

அல்லது $\pi = 3{\cdot}14159264$

'யூலர் — மக்லாரின்' சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க் காணும் தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$\frac{1}{51^2} + \frac{1}{53^2} + \frac{1}{55^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{99^2}$$

இங்கு, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $h = 2$

பிறகு $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$, $f'''(x) = \frac{-24}{x^5}$

$$f^{(v)}(x) = \frac{-72}{x^7}, \quad f^{(vii)}(x) = \frac{-40320}{x^9}$$

இதில், $x_0 = 51$, $x_0 + nh = 99$

$$\sum_{x=51}^{x=99} \frac{1}{x2} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx$$

$$+ \frac{1}{2}\left[f(x_0) + f(x_0+nh)\right]$$

$$+ \frac{h}{12}\left[f'(x_0+nh) - f'(x_0)\right]$$

$$- \frac{h^3}{720}\left[f'''(x_0+nh) - f'''(x_0)\right]$$

$$+ \frac{h^5}{30240}\left[f^{(v)}(x_0+nh) - f^{(v)}(x_0)\right]$$

$$- \frac{h^7}{1209600}\left[f^{(vii)}(x_0+nh) - f^{(vii)}(x_0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{51^2} + \frac{1}{99^2}\right] + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{51^3} - \frac{1}{99^3}\right]$$

$$- \frac{4}{15}\left[\frac{1}{51^5} - \frac{1}{99^5}\right] + \frac{16}{21}\left[\frac{1}{51^7} - \frac{1}{99^7}\right]$$

$$- \frac{64}{15}\left[\frac{1}{51^9} - \frac{1}{99^9}\right]$$

$$= 0{\cdot}004753416 + 0{\cdot}000243290 + 0{\cdot}000001694$$

$$- 0{\cdot}000000008$$

$$= 0{\cdot}004998833$$

வுல் ஹவுஸின் தொடர் கூட்டல் சூத்திரம். (Wool house's Summation of series formula)

ஆய்லர் – மக்லாரின் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \left[\tfrac{1}{2} f(x_0) + f(x_0+h) + f(x_0+2h) + \ldots\ldots + f(x_0+\overline{n-1}\,h) + \tfrac{1}{2} f(x_0+nh)\right]$$

$$- \frac{h}{12}\left[f'(x_0+nh) - f'(x_0)\right]$$

$$+ \frac{h^3}{720}\left[f'''(x_0+nh) - f'''(x_0)\right]$$

$$- \frac{h^5}{30240}\left[f^{(v)}(x_0+nh) - f^{(v)}(x_0)\right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

இச் சூத்திரத்தின் இருமருங்கிலும் m-ஆல் பெருக்கினால்,

$$\frac{k}{h}\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = k\left\{\tfrac{1}{2} f(x_0) + f(x_0+h) + \ldots\ldots\ldots + f(x_0+\overline{n-1}\,h) + \tfrac{1}{2} f(x_0+nh)\right.$$

$$-\frac{h}{12}\left[f'(x_0+nh)-f'(x_0)\right]$$

$$+\frac{h^3}{720}\left[f'''(x_0+nh)-f'''(x_0)\right]$$

$$-\frac{h^5}{30240}\left[f^{(v)}(x_0+nh)-f^{(v)}(x_0)\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\Big\}$$

$$\ldots\ldots \qquad (7\cdot6)$$

இடைவெளி hஐ k ஆல் வகுத்து யூலர்–மக்லாரின் சூத்திரத்தைக் கருதினால்

$$\frac{k}{h}\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx = \left[f(x_0)+f\left(x_0+\frac{1}{k}\right)+f\left(x_0+\frac{2}{k}\right)\right.$$

$$\left.+\ldots+f(x_0+nh)\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}\left[f(x_0)+f(x_0+nh)\right]$$

$$-\frac{h}{12k}\left[f'(x_0+nh)-f'(x_0)\right]$$

$$+\frac{h^3}{720k^3}\left[f'''(x_0+nh)-f'''(x_0)\right]$$

$$-\frac{h^5}{30240k^5}\left[f^{(v)}(x_0+nh)-f^{(v)}(x_0)\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots \qquad (7\cdot7)$$

(7·6), (7·7) ஆகிய இரு சமன்பாடுகளின் இடப் பக்கங்கள் சமமாயிருப்பதால் வலப் பக்கங்களைச் சமன்படுத்தலாம்.

எனவே,

$$\left[f(x_0)+f\left(x_0+\frac{1}{k}\right)+f\left(x_0+\frac{2}{k}\right)+\ldots+f(x_0+nh)\right]$$

$$=k\left[f(x_0)+f(x_0+h)+\ldots+f(x_0+nh)\right]$$

$$- \frac{(k-1)}{2} \left[f(x_0 + nh) - f(a) \right]$$

$$- \frac{(k^2-1)}{12k} \left[f'(x_0 + nh) - f'(x_0) \right]$$

$$+ \frac{(k^4-1)}{720k^3} h^3 \left[f'''(x_0 - nh) - f'''(x_0) \right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (7 \cdot 8)$$

இதற்கு 'வுல் – ஹவுஸி'ன் தொடர் கூட்டுச் சூத்திரம் என்று பெயர்.

இதன் மூலம் ஒரு தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண முடியும்.

'லப்பக்'கின் தொடர் கூட்டல் சூத்திரம் (Lubuck's Summation Series)

வுல் ஹவுஸின் சூத்திரத்தில் வகையீட்டுக் கெழுக்களுக்குப் பதிலாக வகை வேறுபாடுகளைப் பிரதியிட்டால் கிடைக்கும் உருவமே 'லப்பக்'கின் சூத்திரமாகும்.

அவ்வாறே

$$\left[f(x_0) + f(x_0 + \frac{1}{k}) + f(x_0 + \frac{2}{k}) + \ldots + f(x_0 + nh) \right]$$

$$= k \left[f(x_0) + f(x_0 + h) + \ldots + f(x_0 + nh) \right]$$

$$- \frac{(k-1)}{2} \left[f(x_0 + nh) - f(x_0) \right]$$

$$- \frac{(k^2-1)}{12k} \left[\Delta f(x_0 + \overline{n-1}\, h) - \Delta f(x_0) \right]$$

$$- \frac{(k^2-1)}{24k} \left[\Delta^2 f(x_0 + \overline{n-2}\, h) + \Delta^2 f(x_0) \right]$$

$$- \frac{(k^2-1)}{72k^3} \left[\Delta^3 f(x_0 + \overline{n-3}\, h) - \Delta^3 f(x_0) \right]$$

$$-\frac{(k^4-1)(9k^2-1)}{480k^3}\left[\Delta^4 f(x_0+\overline{n-4}\,h)+\Delta^4 f(x_0)\right]$$

$$-\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (7\cdot 9)$$

இச் சூத்திரத்திற்கு 'லப்பக்'கின் சூத்திரமென்று பெயர்.

மாதிரி 1

'லப்பக்'கின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி,

$$\frac{1}{5^2}+\frac{1}{(5\cdot 2)^2}+\frac{1}{(5\cdot 4)^2}+\frac{1}{(5\cdot 6)^2}+\frac{1}{(5.8)^2}$$

$$+\frac{1}{(6\cdot 0)^2}+\frac{1}{(6\cdot 2)^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{(10\cdot 0)^2}\text{-ன்}$$

கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$f(x)=\frac{1}{x^2},\ h=1,\ k=10$$

$x_0 = 5$ என்று கொள்க.

'லப்பக்'கின் சூத்திரமாவது,

$$\left[f(x_0)+f\left(x_0+\frac{1}{k}\right)+f\left(x_0+\frac{2}{k}\right)+\ldots\ldots+f(x_0+nh)\right.$$

$$=k\,[f(x_0)+f(x_0+h)+\ldots\ldots+f(x_0+nh)]$$

$$-\frac{(k-1)}{2}\left[f(x_0+nh)-f(x_0)\right]$$

$$-\frac{(k^2-1)}{12k}\left[\Delta f(x_0+\overline{n-1}\,h)-\Delta f(x_0)\right]$$

$$-\frac{(k^2-1)}{24k}\left[\Delta^2 f(x_0+\overline{n-1}\,h)+\Delta^2 f(x_0)\right]$$

$$-\frac{(k^2-1)(19k^2-1)}{72k^3}\left[\Delta^3 f(x_0+\overline{n-3}\,h)-\Delta^3 f(x_0)\right]$$

$$-\frac{(k^2-1)(9k^2-1)}{480k^3}\left[\Delta^4 f(x_0+\overline{n-4}\,h)+f(x_0)\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{(5)^2}+\frac{1}{(5\cdot1)^2}+\frac{1}{(5\cdot2)^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{(10\cdot0)^2}$$

$$=10\,[f(5)+f(6)+f(7)+f(8)+\ldots\ldots+f(10)]$$

$$-\frac{(10-1)}{2}\left[f(5)+f(10)\right]$$

$$-\frac{(10^2-1)}{12\times10}\left[\Delta f(9)-\Delta f(5)\right]$$

$$-\frac{(10^2-1)}{24\times10}\left[\Delta^2 f(8)+\Delta^2 f(5)\right]$$

$$-\frac{(10^2-1)(19\times10^2-1)}{720\times10^3}\left[\Delta^3 f(7)-\Delta^3 f(5)\right]$$

$$-\frac{(10^2-1)(9\times10^2-1)}{480\times10^3}\left[\Delta^4 f(6)+\Delta^4 f(5)\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

வேறுபாடுகளின் மதிப்புகளைக் காண வேறுபாட்டு அட்டவணையை அமைப்போம்.

x	$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
5	0·04000				
		−0·01223			
6	0·02777		0·00487		
		−0·00736		−0·00230	
7	0·02041		0·00257		0·00129
		−0·00479		−0·00101	
8	0.01562		0·00151		0·00044
		−0·00328		−0·00057	
9	0·01234		0·00094		
		−0·00234			
10	0·01000				

மேலுள்ள சமன்பாட்டில் வேறுபாடுகளின் மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{1}{(5\cdot0)^2} + \frac{1}{(5\cdot2)^2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{(10\cdot0)^2}$$

$$= 10\ [\ 0\cdot12604\ ]$$

$$- 4\cdot5\ [\ 0\cdot01 + 0\cdot04\ ]$$

$$- \frac{99}{120}\left[\ 0\cdot01223 - 0\cdot00234\ \right]$$

$$- \frac{99}{240}\left[\ 0\cdot00094 + 0\cdot00487\ \right]$$

$$- \frac{99\times1899}{720000}\left[\ 0\cdot00230 - 0\cdot00057\ \right]$$

$$- \frac{99\times899}{480000}\left[\ 0\cdot00044 + 0\cdot00129\ \right]$$

$$= 1\cdot02512$$

'நியூட்டன் - கோட்ஸின் தொகைச் சூத்திரம்' (Newton-Cotes Integration Formula)

இச் சூத்திரத்தை இலக்ராஞ்ஜின் இடைச் செருகல் சூத்திரத்திலிருந்து பெறலாம். இலக்ராஞ்ஜின் இடைச் செருகல் சூத்திரமாவது,

$$f(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\phi(x)}{x - x_r} \cdot \frac{1}{\phi^1(x_r)} f(x_r)$$

இதில், $\phi(x) = \prod_{r=0}^{n} (x - x_r)$

$$\phi^1(x_r) = \left[\frac{d\ \phi(x)}{dx}\right]_{x = x_r}$$

$$= (x_r - x_0)\ (x_r - x_1)\ \cdots\cdots\cdots\ (x_r - x_n)$$

இச் சூத்திரத்தை x_0 லிருந்து x_n வரை தொகைப்படுத்தினுல்

$$\int_{x_0}^{xn} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{xn} \left[\sum_{r=0}^{n} \frac{\phi(x)}{(x-xr)} \frac{1}{\phi^1(xr)} f(xr) \right] dx$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{f(xr)}{\phi'(x_r)} \int_{x_0}^{x_n} \frac{\phi(x)}{(x-x_r)}\,dx$$

இதில் தொகைச் சார்பான (integrand)

$\dfrac{\phi(x)}{x-x_r}$, x_0 லிருந்து x_n வரை ஒரே சீராக ஒருங்குவதால் (Converges uniformly) தொடர் உறுப்புத் தொகை காணும் முறையைக் கையாளுகிறேம்.

$x_0 = -1$ என்றும் $x_n = 1$ என்றும் கொள்க.

$h = \dfrac{2}{n}$ என்று கொண்டால், $\left[-1, 1\right]$ என்ற

எல்லை $x_0 = -1$, $(x_0+h) = -1 + \dfrac{2}{n}$, $\left(x_0+2h\right)$

$$= -1 + \frac{4}{n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,\ (x_0+nh) = -1 + n\,\frac{2}{n} = 1 = x_n$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{r=0}^{n} \frac{f(xr)}{\phi'(xr)} \int_{-1}^{1} \frac{\phi(x)}{(x-x_r)}\,dx \quad \ldots (7{\cdot}10)$$

இப்பொழுது $\phi'(x_r) = \left[\left(-1 + \dfrac{2r}{n} + 1 \right) \right.$

$$\left(-1+\frac{2r}{n}+1-\frac{2}{n}\right)\left(-1+\frac{2r}{n}+1-\frac{2r-1}{n}\right).$$

$$\left(-1+\frac{2r}{n}+1-\frac{\overline{2r+1}}{n}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\left(-1+\frac{2r}{n}-1\right)\Big]$$

$$=\left(\frac{2}{n}\right)^n\Big[r(r-1)\ldots\ldots(r-\overline{r-1})\,(r-\overline{r+1})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots(r-n)\Big]$$

$$=(-1)^{n-r}\,r!\,(x-r)!\left(\frac{2}{n}\right)^n$$

$$\frac{\phi(x_r)}{x-x_r}=(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_n)$$

$$=(x+1)\,(x+1-\frac{2}{n})\ldots\left(x+1-\frac{2r+1}{n}\right)\ldots$$

$$\ldots\ldots(x-1)$$

$$=\left(\frac{2}{n}\right)^n\Big[\frac{n}{2}(x+1)\,\frac{n}{2}\left(x+1-\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots$$

$$\ldots\frac{n}{2}\left(x+1-\frac{2\overline{r-1}}{n}\right)$$

$$\frac{n}{2}\left(x+1-\frac{\overline{2r+1}}{n}\right)\ldots\ldots$$

$$\ldots\frac{n}{2}(x-1)\Big]$$

இதில், $\frac{n}{2}(x+1)=u$

$$\therefore\quad dx=\frac{2}{n}\,du$$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$\frac{\phi(x_r)}{x-x_r}=\left(\frac{2}{n}\right)^n u(u-1)\ldots(u-\overline{r-1})(u-\overline{r+1})\ldots(u-n)$$

இப்பொழுது (7·10) ஆவது சமன்பாடு

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^{n-r}f(x_r)}{r!\,(n-r)!}\left(\frac{2}{n}\right)\int_0^n \prod_{r=0}^{n}(u-r)\,du$$

என்றாகிறது.

இதில் $x_r = x_0 + rh$ எனப் பிரதியிட்டால்;

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^n f(x_0+rh)}{r!\,(n-r)!}\, h \int_0^n \prod_{r=0}^{n} (u-r)\,du$$

$$= \sum_{r=0}^{n} H_r\, f(x_0+rh) \qquad \ldots \qquad (7\cdot11)$$

$$\text{இதில்},\ H_r = \frac{(-1)^{n-r}}{r!\,(n-r)!}\, h \int_0^n (u-r)\,du$$

இச் சூத்திரத்தை நியூட்டன் – கோட்ஸின் தொகைச் சூத்திரமென்கிறோம்.

கவனிக்கவும் : நியூட்டன் – கோட்ஸின் சூத்திரத்தில் $n = 1$, $r = 0, 1$ என்று கொண்டால் சரிவகம் சார்ந்த விதியையும் $n = 2$, $r = 0, 1, 2$ என்று கொண்டால் ஸிம்ஸனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதியையும், $n = 3$, $r = 0, 1, 2, 3$ என்று கொண்டால் சிம்ஸனின் $\frac{3}{8}$ ஆவது விதியையும் பெறுகிறோம்.

மாதிரி : நியூட்டன் – கோட்ஸின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி

$$\int_0^2 \sqrt{x^2(1+x)}\; dx$$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

$h = \frac{1}{3}$ எனக் கொண்டு தொகை சார்பின் மதிப்பை 0 விருந்து 2 வரை அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

x	$f(x) = \sqrt{x^2(1+x)}$
0	0
$\frac{1}{3}$	0·38?9
$\frac{2}{3}$	0·8628
1	1·4142
$\frac{4}{3}$	2·0360
$\frac{5}{3}$	2·7200
2	3·4642

நியூட்டன் – கோட்ஸின் சூத்திரமாவது,

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{n-r}}{r!} \frac{f(x_0+rh)}{(n-r)!} h \int_0^n \prod_{r=0}^{n} (u-r)\,du$$

இங்கு, 6 பிரிவுகளுள்ளமையால் $r = 0, 1, 2, \ldots\ldots 6$ எனக் கொள்கிறோம்.

$$= \sum_{r=0}^{n} Hr\; f(x_0 + rh)$$

இதில், $$Hr = \frac{(-1)^{n-r}}{r!\,(n-r)!} h \int_0^n u(u-1)\ldots(u-r)\,du$$

எனவே, $$\int_{x_0}^{x_0 = nh} f(x)\,dx = H_0 f(x_0) + H_1 f(x_0+h) + \ldots\ldots + H6\, f(x_0+6h)$$

$n = 6$, $h = \frac{1}{3}$ என்பதால்,

$$H_0 = \frac{(-1)^6}{6!} \frac{1}{3} \int_0^6 (u-1)(u-2)\ldots\ldots(u-6)\,du$$

$$= \frac{41}{840}$$

$$H_1 = \frac{(-1)^5}{1!\,5!} \frac{1}{3} \int_0^6 u(u-2)(u-3)\ldots(u-6)\,du$$

$$= \frac{9}{35}$$

$$H_2 = \frac{(-1)^4}{2!\,4!} \frac{1}{3} \int_0^6 u(u-1)(u-3)\ldots(u-6)\,du$$

$$= \frac{9}{280}$$

$$H_3 = \frac{(-1)^3}{3!\,3!}\ \frac{1}{3}\int_0^6 u(u-1)(u-2)(u-4)\,.\,(u-6)\,du$$

$$= \frac{34}{105}$$

$$H_4 = \frac{(-1)^2}{4!\,2!}\ \frac{1}{3}\int_0^6 u(u-1)(u-2)(u-3)(u-5)(u-6)\,du$$

$$= \frac{9}{280}$$

$$H_5 = \frac{(-1)^1}{5!\,1!}\ \frac{1}{3}\int_0^6 u(u-1)(u-2)(u-3)(u-4)(u-6)\,du$$

$$= \frac{9}{35}$$

$$H_6 = \frac{(-1)^0}{6!}\ \frac{1}{3}\int_0^6 u(u-1)(u-2)(u-3)(u-4)(u-5)\,du$$

$$= \frac{41}{840}$$

$$\therefore \int_0^2 \sqrt{x^2(1+x)}\ dx$$

$$= 0 \times \frac{41}{840} + 0{\cdot}3849 \times \frac{9}{35}$$

$$+ 0{\cdot}8628 \times \frac{9}{280} + 1{\cdot}4142 \times \frac{34}{105}$$

$$+ 2{\cdot}0360 \times \frac{9}{280} + 2{\cdot}7200 \times \frac{9}{35}$$

$$+ 30\,4642 \times \frac{41}{840}$$

$$= 3{\cdot}03705\,3$$

ஹார்டியின் சூத்திரம் (Hardy's formula)

நியூட்டன் - கோட்ஸின் சூத்திரத்தில் $n = 6$ எனக் கொண்டால்,

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \frac{(x_0 + nh - x_0)}{840} \Big\{ 41 f(x_0) + 216 f(x_0 + h) + 27 f(x_0 + 2h) + 272 f(x_0 + 3h) + 27 f(x_0 + 4h) + 216 f(x_0 + 5h) + 41 f(x_0 + 6h) \Big\} \quad \ldots\ldots (7{\cdot}12)$$

ஆனால் மைய வேறுபாடு,

$$\delta^6 f(x_0 + 5h)$$

$$= f(x_0) - 6f(x_0 + h) + 15f(x_0 + 2h) - 20 f(x_0 + 3h) + 15 f(x_0 + 4h) - 6 f(x_0 + 5h) + f(x_0 + 6h) \quad \ldots\ldots (7{\cdot}13)$$

$f(x + 4h)$ என்ற மைய மதிப்பிலிருந்து சமதூரத்தில் அமைந்துள்ள ஏதாவதொரு ஜோடியான சார்புகளின் மதிப்புகளை (functional values) (7 12), (7·13) ஆகிய சார்புகளிலிருந்து நீக்கினால்,

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\,nh \left\{ 0{\cdot}14\, f(x_0) + f(x_0 + 6h) + 0{\cdot}81\,[\,f(x_0+h) + f(x_0+5h)\,] + 1{\cdot}10\, f(x_0 + 3h) \right\}$$

இது ஹார்டியின் தொகைச் சூத்திரமாகும்.

மாதிரி : $\int_0^3 x^2 \; dx$ ன் தொகையை ஹார்டியின் தொகைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

$h = 0{\cdot}5$ எனக் கொண்டு தொகையின் எல்லையை 6 பிரிவுகளாகப் பிரித்து x ன் மதிப்பை அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

$\therefore \quad x_0 = 0, \; x_0 + nh = 3$

x	$f(x) = x^2$
0	$0 = f(x_0)$
0·5	$0{\cdot}25 = f(x_0 + h)$
1·0	$1{\cdot}00 = f(x_0 + 2h)$
1·5	$2{\cdot}25 = f(x_0 + 3h)$
2·0	$4{\cdot}00 = f(x_0 + 4h)$
2·5	$6{\cdot}25 = f(x_0 + 5h)$
3·0	$9.00 = f(x_0 + 6h)$

ஹார்டியின் சூத்திரமாவது,

$$\int_{0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \frac{nh}{3} \left\{ 0{\cdot}14\,[\,f(x_0) + f(x_0 + 6h)\,] + 0{\cdot}81\,[\,f(x_0 + h) + f(x_0+5h)\,] + 1{\cdot}10 f(x_0 + 3h) \right\}$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{0+6\cdot\frac{1}{2}} x^2 \, dx = \frac{6(0\cdot5)}{3} \Big\{ (0\cdot14)[0 + 9\cdot0] + (0\cdot81)[0\cdot25 + 6\cdot25] + 1\cdot10[2\cdot25] \Big\}$$

$$= 1\cdot26 + 5\cdot265 + 2\cdot475$$

$$\text{(i. e.)} \int_{0}^{3} x^2 \, dx = 9\cdot000$$

மாதிரி :

$$I = \int_{1\cdot72}^{1\cdot78} e^{-x} \, dx\text{-ஐ}$$ ஹார்டியின் சூத்திரம் மூலம்

தொகைப்படுத்து.

$x = 0\cdot01$ எனக் கொண்டு தொகையின் எல்லையை 6 பிரிவுகளாகப் பிரித்து e^{-x} என்ற தொகைச் சார்பின் மதிப்புகளை 1·72 -லிருந்து 1·78 வரை

x	$f(x) = e^{-x}$
1·72	0·179066
1·73	0·177284
1·74	0·175520
1·75	0·173774
1·76	0·172045
1·77	0·170333
1·78	0·168638

ஹார்டியின் சூத்திரமாவது,

$$I = \int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\, dx = \frac{nh}{3} \Big\{ 0\cdot14 \Big[f(x_0) + f(x_0 + 6h) \Big]$$

$$+ 0.81 \; [f(x_0+h) + f(x_0+5h)]$$

$$+ 1.10 \; f(x_0+3h) \Big\}$$

$$= 1.72 + 6(0.01)$$

$$\int_{1.72} e^{-x} \, dx = \frac{0.06}{3} \Big\{ (0.14) \Big[0.179066 + 0.168638 \Big]$$

$$+ 0.81 \, [0.177284 + 0.170333]$$

$$+ 1.10 \, (0.173774) \Big\}$$

$$\int_{1.72}^{1.78} e^{-x} \, dx = 0.02 \; \Big\{ 0.04867856 + 0.28156977$$

$$+ 0.19115140 \Big\}$$

$$= 0.0104279946$$

தொகையின் உண்மையான மதிப்பு,

$$\int_{1.72}^{1.78} e^{-x} \, dx = \Big[-e^{-x} \Big]_{1.72}^{1.78}$$

$$= - [0.168638 - 0.179066]$$

$$= 0.010428$$

கிரிகோரியின் தொகைச் சூத்திரம் (Gregory's integration formula

சார்பின் அமைப்புத் தெரியாமலிருந்து அதன் மதிப்புகள் மட்டும், $x = x_0$ லிருந்து $x = x_0 + nh$ வரை சம இடைவெளியில் அமைந்த மாறிகளுக்குத் தெரிந்திருந்தால், இச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தமுடியும்.

யூலர்-மக்லாரின் சூத்திரத்தில் சார்பின் வகையீட்டுக் கெழுக்களுக்குப் பதிலாக எண்ணியல் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரங்களை (Numerical differentiation) பிரதியிட்டால், இச் சூத்திரத்தை எளிதில் பெறலாம்.

ஆய்லர் - மக்லாரினின் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx \quad \left[\tfrac{1}{2} f(x_0) + (x_0 + h) + \ldots\ldots \right.$$

$$\left. + f(x_0\ \overline{n-1}h) + \tfrac{1}{2} f(x_0 + nh) \right]$$

$$- \frac{h}{12}\ [f'(x_0 + nh) - f'(x_0)]$$

$$+ \frac{h^3}{720}\ [f'''(x_0 + nh) f'''(x_0)]$$

$$- \frac{h^5}{30240}\ [f^{(v)}(x_0 + nh) - f^{(v)}(x_0)]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

கீழ்க்காணும் எண்ணியல் வேறுபாட்டுச் சூத்திரங்களைக் கருதுக.

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta f(x_0) - \frac{\Delta^2}{2} f(x_0) + \frac{\Delta^3}{3} f(x_0) - \cdots \right]$$

$$f'(x_0 + nh) = \frac{1}{h}\left[\Delta f(x_0 + \overline{n-1}h) + \frac{\Delta^2}{2} f(x_0 + \overline{n-2}\,h) \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta^3}{3} f(x_0 + n-3\,h) + \ldots \right]$$

$$f'''(x_0 + nh) = \frac{1}{h^3}\ [\Delta^3 f(x_0 + \overline{n-3}\,h)$$

$$+ \tfrac{3}{2}\,\Delta^4 f(x_0 + \overline{n-4}\,h)$$

$$+ \tfrac{7}{4}\,\Delta^5 f(x_0 + n-5\,h)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$$

(இதில் $n = 0$ எனில் $f'''(x_0)$ ஐப் பெறலாம்).

$$f^{(v)}(x_0 + nh) = \frac{1}{h^5}\ [f(x_0 + \overline{n-5}\,h) - \tfrac{5}{2}\,\Delta^6 f(x_0 - \overline{n-6}\,h)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ \ldots]$$

(இதில், $n = 0$ எனில், $f^{(v)}(x_0)$ஐப் பெறலாம்).

மேலுள்ள எண்ணியல் சூத்திரங்களை யூலர் - மக்லாரின் - சூத்திரத்தில் முறையே பிரதியிட்டால்,

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \Big[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_0+h)+\ldots\ldots$$

$$+ f(x_0+\overline{n-1}h) + \frac{1}{2} f(x_0+nh)\Big]$$

$$-\frac{1}{12}\Big[\Delta f(x_0+\overline{n+1}h) - \Delta f(x_0)\Big]$$

$$-\frac{1}{24}\Big[\Delta^2 f(x_0+\overline{n-2}h) + \Delta^2 f(x_0)\Big]$$

$$-\frac{19}{720}\Big[\Delta^3 f(x_0+\overline{n-3}h) - \Delta^3 f(x_0)\Big]$$

$$-\frac{3}{160}\Big[\Delta^4 f(x_0+\overline{n-4}h) + \Delta^4 f(x_0)\Big]$$

$$-\frac{683}{60480}\Big[\Delta^5 f(x_0+\overline{n-5}h) - \Delta^5 f(x_0)\Big]$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (7{\cdot}14)$$

என்று கிடைக்கிறது. இச்சூத்திரத்திற்குக் கிரிகோரியின் தொகைச்) சூத்திரம் என்று பெயர்.

மாதிரி : கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து கிரிகோரியின் தொகைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி,

$\int_0^6 f(x)\,dx$ ன் மதிப்பினைக் காண்க.

x	0	1	2	3	4	5	6
$y=f(x)$	0	9	16	9	0	25	144

கிரிகோரியின் தொகைச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{h_0+nh} f(x)dx = \Big[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_0+h) + \ldots + \frac{1}{2} f(x_0+nh)\Big]$$

$$- \frac{1}{12}\left[\Delta f(x_0 + \overline{n-1}h) - \Delta f(x_0) \right]$$

$$- \frac{1}{24}\left[\Delta^2 f(x_0 + \overline{n-2}h + \Delta^2 f(x_0) \right]$$

$$- \frac{19}{720}\left[\Delta^3 f(x^3 + n - 3h) - \Delta^3 f(x_0) \right]$$

$$- \frac{3}{160}\left[\Delta_4 f(x_0 + \overline{n-4}h) + (\Delta^4 f(x_0) \right]$$

$$- \frac{683}{60480}\left[\Delta^5 f(x_0 + \overline{n-5}h) - \Delta^5 f(x_0) \right]$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணைக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைப்போம்.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
0	0						
		9					
1	9		−2				
		7		−12			
2	16		−14		24		
		−7		12		0	
3	9		−2		24		0
		−9		36		0	
4	0		34		24		
		25		60			
5	25		94				
		119					
6	144						

இவ் வேறுபாடுகளின் மதிப்புகளை மேலுள்ள கிரிகோரியின் சூத்திரத்தில் பிரதியிட்டால்,

$$\int_0^6 f(x)\,dx = \frac{U}{2} + 9 + 16 + 9 + 0 + 25 + \frac{144}{2}$$

$$- \frac{1}{12}\left[119 - 9 \right]$$

$$- \frac{1}{24}\left[94 - (-2) \right]$$

$$- \frac{19}{720}\left[60 - (-12) \right]$$

$$- \frac{3}{160}\left[24 - 24 \right]$$

$$= 9 + 16 + 9 + 25 + 72 - 9{\cdot}166 - 4 - 1{\cdot}900$$

$$= 131 - 15{\cdot}066$$

$$= 115{\cdot}934$$

பயிற்சி 7

1. $Ux = a + bx + cx^2$ எனில்,

$$\int_1^3 ux\, dx = 2u_2 + \frac{1}{12}\left(u_0 - 2u_2 + u_4 \right)$$

என்று நிறுவுக.

மேலும், $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{10}}\, dx$ ன் மதிப்பினைக் காண்க.

2. $$\int_0^1 ux\, dx = \frac{1}{12}\left(5u_1 + 8u_0 - u_{-1} \right)$$

என்பதை (தோராயமாக) நிறுவுக

3. கீழ்க்காணும் தோராயமான சூத்திரத்தை நிறுவுக.

$$\int_{-1}^{1} ux\, dx = \frac{1}{12}\left[13\left(u_1 + u_{-1}\right) - \left(u_3 + u_{-3}\right) \right]$$

4. 80 அடி அகலமுள்ள ஓர் ஆற்றின் A என்ற ஆழங்கள் x என்ற தூரங்களுக்கு அடிகளில் (fee.) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

x :	0	10	20	30	40	50	60	70	80
d :	0	4	7	9	12	15	14	8	3

சிம்ஸனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதியைப் பயன்படுத்தி ஆற்றின் பரப் பளவைக் கண்டுபிடி.

5. $\int_1^5 \frac{dx}{x}$-ன் தோராய மதிப்பு 1·62 என்பதைச் சிம்ஸனின் விதிமூலம் நிறுவுக.

6. தொகையின் எல்லையை 8 சமபாகங்களாகப் பிரித்து $\int_2^{10} \frac{dx}{1+x}$ என்ற தொகையின் மதிப்பினைக் காண்க.

7. தும்பா ராக்கெட் தளத்திலிருந்து ஒரு ராக்கெட் செலுத்தப் பட்டது. அதன் ஈர்ப்பு முடுக்கம் (acceleration due to gravity) முதல் 60 வினாடிகளுக்குப் பதிவு செய்யப்பட்டுப் பின்வருமாறு அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டது.

காலம் t	0	10	20	30	40	50	60
ஈர்ப்புமுடுக்கம் f (m/sec^2)	30·00	31·63	33·44	35·47	37 75	40·33	43·25

ராக்கெட்டின் திசைவேகத்தைக் கணக்கிடுக.

8. நியூட்டனின் சூத்திரத்திலிருந்து ஒரு பொதுவான பரப்பு காண்முறைச் சூத்திரத்தை வருவிக்கவும்.

9. ஸிம்ஸன், வெடில் ஆகிய விதிகளைப் பயன்படுத்தி,

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - 0\cdot162 \sin^2\phi} \quad d\phi$$

$\phi = 0^0, 15^0, 30^0, 45^0, 60^0, 75^0, 90^0$, ஆகிய மதிப்புகளுக்குத் தொகையின் மதிப்பைக் காண்க.

10. 'காஸ்'ஸின் தொகைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$$ $n = 5$ எனக் கொண்டு தொகையின் மதிப்பைக் காண்க.

11. ஸிம்ஸனின் விதியைப் பயன்படுத்தி $I = \int_{200}^{1000} \frac{dx}{\log_{10} x}$ ன் மதிப்பை 8 பிரிவுகளை அமைத்துக் காண்க

12. வெடிலின் விதியைப் பயன்படுத்தி $I = \int_{0\cdot 4}^{1\cdot 6} \frac{x}{\sinh x}\, dx$ ன் மதிப்பினை 12 சமபிரிவுகளை ஏற்படுத்திக் காண்க

13. $f(x)$ என்ற சார்பு நான்காம்படி பல்லுறுப்புக் கோவையாக இருக்கும்போது

$$\int_0^5 f(x)\, dx = \frac{1}{144}\Big[95f(10) - 50f(1) + 600 f(2) - 350 f(3) + 425 f(4) \Big]$$

என நிரூபி.

14. மூன்றாம் வேறுபாடுகள் சமமாயிருக்கும்போது,

$$\int_0^2 f(x)\, dx = \frac{1}{24}\Big[f(-\tfrac{1}{2}) + 23f(\tfrac{1}{2}) + 23f(\tfrac{3}{2}) + f(\tfrac{5}{2}) \Big]$$

என்பதைக் காண்க

15. $f(x)$ என்னும் சார்பின் 4ஆம் வேறுபாடுகள் பூச்சியமாக இருக்கும்போது,

$$\int_0^d e^{-x} f(x)\, dx = \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2})$$

என நிரூபி.

16. ஹார்டியின் தொகைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $x=0$-க்கும், $x=2$-க்கும் இடையேயுள்ள $y=x\sqrt{1+x}$ என்ற சாரியின் தொகையைக் காண்க.

17. யூலர்-மக்லாரின் கூட்டுத்தொகைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ ன் மதிப்பினைக் காண்க.

18. யூலர்-மக்லாரின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி;

$$\sum_{x=10}^{150} \frac{1}{(3+4x)^2}$$ என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையை ஆறு தசமத் தானத்திற்குச் சரியாகக் காண்க.

19. கொடுக்கப்பட்டுள்ள முடிவில்லாத தொடரின் கூட்டுத் தொகையை 6 தசமத்தானத்திற்குச் சுத்தமாகக் காண்க.

$$\frac{1}{101^2}+\frac{1}{103^2}+\frac{1}{105^2}+\ldots\ldots+$$

20. காஸ்ஸின் பரப்புகாண் முறைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $\int_5^{12} \frac{dx}{x}$ என்ற தொகையின் மதிப்பினைக் காண்க.

21. கிரிகோரியின் தொகைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து $\int_1^7 f(x)\,dx$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$:	2·87627	2·87757	2·87888	2·88019	2·88150	2·88281	2·88412

22. யூலர்—மக்லாரின் தொகைச் சூத்திரத்திலிருந்து 'லப்பக்'கின் சூத்திரத்தை வருவிக்கவும்.

23. வுல்ஹுவுஸின் சூத்திரத்தை யூலர்-மக்லாரின் சூத்திரத்தி லிருந்து பெறுக.

24. $\sum_{n=50}^{n=100} \frac{1}{n^2}$-ன் மதிப்பினை 6 தசமத்தானத்திற்குச் சரியான 'லப்பக்'கின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

25. இலக்ராஞ்ஜின் சூத்திரத்திலிருந்து நியூட்டன்-கோட்ஸின் தொகைச் சூத்திரத்தை நிறுவுக.

26. 'நியூட்டன்-கோட்'ஸின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $\frac{1}{201^2}+\frac{1}{202^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{301^2}$-ன் மதிப்பினை 8 தசமத்தானத் திற்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

27. 'லப்பக்'கின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $\sum_{x=50}^{100} \frac{1}{x^2}$-மதிப்பைப் பெறுக.

28. $yx = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + bx^5$ எனில்,

$$\int_0^6 yx\,dx = 0{\cdot}28\,(y_0 + y_6) + 1{\cdot}62\,(y_1 + y_5) + 2{\cdot}2y_3$$

என்ற ஹார்டியின் சூத்திரத்தை நிரூபி. $\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$-ன் மதிப்பை 4 தசமத்தானத்திற்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

8. தொடர் கூட்டல்

(Summation of Series)

ஒரு தொடரின் பொது உறுப்பு ஒரு சார்பின் முதல்நிலை வேறுபாடாக (first difference) இருந்தால், அத் தொடரின் n-உறுப்புகளின் (n-terms) கூட்டல் தொகையைக் காணல்.

$u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$ என்பது, n உறுப்புகள் கொண்ட தொடராகட்டும்,

இதில், u_x என்பது, $f(x)$-ன் முதல்நிலை வேறுபாடாகும்.

அதாவது, $u_x = \Delta f(x)$ அல்லது $f(x) = \Delta^{-1} u_x$

இப்பொழுது, $u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n$-ன் மதிப்பைக் காண வேண்டும். h என்பது, வேறுபாட்டின் இடைவெளியெனில்,

$$u_{x_0} = \Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$
$$u_{x_0 + h} = \Delta f(x_0 + h) = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h)$$
$$u_{(x_0 + 2h)} = \Delta f(x_0+2h) = f(x_0+3h)-f(x_0+2h)$$

....

....

....

$$u_{x_0 + (n-1)h} = \Delta f(x_0+\overline{n-1}\,h) = f(x_0+nh)-f(x_0+\overline{n-1}\,h)$$

இவற்றைக் கூட்டினால்,

$$u_{x_0} + u_{x_0 + h} + \ldots\ldots + u_{x_0 + (n-1)h} = f(x_0 + nh) - f(x_0) \quad \ldots\ldots(8\cdot1)$$

ஆதியை ஒரு தகுந்த மாற்றம் செய்வதால், $h=1$, $x_0 = 1$ என்று அமைக்க முடியும்.

அதனால் (8·1) பின்வருமாறு அமைகிறது.

$$\sum_{x=1}^{n} u_x = f(n+1) - f(1) = [f(x)]_1^{n+1}$$

ஆகவே, Σ u_x-ன் கூட்டுத் தொகையைக் காண $f(x)$ என்ற சார்பை. $\Delta f(x) = u_x$ என்று அமையுமாறு காணவேண்டும் என்பது போதிய நிபந்தனையாகும். u_x-ன் கூட்டுத் தொகையைக் காண, அதற்கான எல்லைகள் கொடுக்கப்படாவிட்டால், $f(x) = \Delta^{-1} u_x$ ஐ u_x-ன் வரையறு தொகை (inate finite integral) எனக் கூறு கிறோம். ஆனால், வரையறுத்த எல்லைகளைப் பயன்படுத்தினால் $f(x)$ ஐ u_x-ன் வரையறுத்த தொகை என்கிறோம்.

மாதிரியாக, $\sum\limits_{p}^{q} u_x = \Big[f(x) \Big]_p^{q+1}$ இது வரையறுத்த தொகைக்கு,

$\Delta^{-1} u_x = f(x) + c.$ இது வரையறு தொகைக்கு.

மாதிரி 1 : திட்டமான வேறுபாடுகளைப் பயன்படுத்தித் தொடரின் n—உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$$u_x = (x+3)(x+4)(x+5)$$

$u_x = (x+5)(x+4)(x+3) = (x+5)^{3}$ (காரணீயப் பெருக்கல் குறியீடுமூலம்),

$$\therefore \quad \sum_{x=1}^{n} u_x = \sum_{x=1}^{n} (x+5)^{(3)} = \Big\{ \tfrac{1}{4}(x+5)^{4} \Big\}^{n+1} \quad (h = 1 \text{ எனில்}),$$

$$= \frac{1}{4}\Big[(n+6)^{4} - (6)^{4} \Big]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[(n+6)(n+5)(n+4)(n+3) - 360 \Big]$$

$$\therefore \quad \sum_{x=1}^{n} u_x = \frac{1}{4}\Big[(n+6)(n+5)(n+4)(n+3) - 360 \Big]$$

மாதிரி 2 : $\quad u_x = \dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$

எனில், $\sum\limits_{x=1}^{n} u_x$-ன் மதிப்பு என்ன?

$$u_x = \frac{1}{(x+3)(x+4)} = (x+2)^{(-2)}$$ (காரணியப் பெருக்கல் குறியீடு மூலம்).

$$\therefore \sum_{x=1}^{n} u_x = \sum_{x=1}^{n} (x+2)^{(-2)} = \left[\frac{(x+2)^{(-1)}}{(-1)} \right]_1^{n+1}$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n} u_x = -\left[(n+3)^{(-1)} - 3^{(-1)} \right] =$$

$$-\left[\frac{1}{n+4} - \frac{1}{4} \right] = \frac{n}{4(n+4)}$$

கீழ்க்காணும் தொடருக்கான n உறுப்புகளின் கூட்டல் தொகையைக் காண்க.

12, 40, 90, 168, 280, 432, …………

u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$	$\Delta^4 u_x$
12				
	28			
40		22		
	50		6	
90		28		0
	78		6	
168		34		0
	112		6	
280		40		
	152			
432				

நான்காம் நிலை வேறுபாடுகள் பூச்சியம் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

$$\therefore u_x = u_0 + \binom{x}{1}\Delta u_0 + \binom{x}{2}\Delta^2 u_0 + \binom{x}{3}\Delta^3 u_0$$

$$= 12 + \binom{x}{1} 28 + \binom{x}{2} 22 + \binom{x}{3} 6$$

$$= 12 + 28\binom{x}{1} + 22\binom{x}{2} + 6\binom{x}{3}$$

கொடுக்கப்பட்ட தொடர் u_0; u_1; u_2 ...... எனில், இந்த உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையாவது,

$$\sum_{x=0}^{n-1} u_x = \sum_{x=0}^{n-1} \left[12 + 28 \binom{x}{1} + 22 \binom{x}{2} + 6 \binom{x}{3} \right]$$

$$= \left[12 \binom{x}{1} + 28 \binom{x}{2} + 22 \binom{x}{3} + 6 \binom{x}{4} \right]_0^n$$

$$= 12n + 28 \binom{n}{2} + 22 \binom{n}{3} + 6 \binom{n}{4}$$

$$= 12n + 28 \frac{n(n-1)}{2} + \frac{22(n)(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$+ \frac{6(n)(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= 12n + 14n(n-1) + \tfrac{11}{3} n(n-1)(n-2)$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$$

$$= \frac{1}{12} [144n + 168n(n-1) + 44n(n-1)(n-2)$$

$$+ 3n(n-1)(n-2)(n-3)]$$

$$= \frac{1}{12} \left[3n^4 + 26n^3 + 69n^2 + 46n \right]$$

$$= \frac{n}{12} \left[3n^3 + 26n^2 + 69n + 46 \right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12} \left[3n^2 + 23n + 46 \right]$$

ஒரு தொடரின் பொதுவான உறுப்பும் அதன் கூட்டுத் தொகையும்
(General term of a series and its sum)

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தொடரின் பொது உறுப்பை $u_x = g(x) + ar^x$ எனக் கொள்க. இதில் $g(x)$ என்பது, x-ன் n-ஆம்படி விகிதமுறு முழுவெண் சார்பாகும் (rational integral function). u_x-க்கு அடுத்தடுத்த வேறுபாடுகளை அமைத்துக் கொண்டோமானால், இந்த வேறுபாடுகள் r என்னும் பொது விகிதத்தோடு (common ratio) பெருக்குத் தொடரில் (geometric

progression) அமையும். எனவே, ஒரு தொடரின் முதல் சில உறுப்புகள் மட்டும் தெரிந்திருந்து, n ஆம் நிலை வேறுபாடுகள் பெருக்குத் தொடரில் அமையுமாயின், அத் தொடரின் பொது உறுப்பை $ar^x + g(x)$ எனக் கொள்கிறோம். இப்பொழுது இத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண, $g(x)$-ஐக் காரணீய பெருக்குக் குறியீடுமூலம் குறிக்கிறோம். $g(x)$-ஐ $x^{(r)}$ எனக் குறிப்பதாகக் கொண்டால்,

$$\sum_{1}^{n} x^{(r)} = \left[\frac{x^{(r+1)}}{(r+1)}\right]_1^{n+1}$$

$$\sum_{1}^{n} a^x = \left[\frac{a^x}{(a-1)}\right]_1^{n+1}$$

மாதிரி 3 : கீழ்க்காணும் தொடரின் பொது உறுப்பைக் கண்டுபிடித்துப் பின் அத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

1, 6, 11, 18 31, 58, 115,.....................

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர், $u_x = 1, 6, 11, 18, 31, 58, 115$ ......எனக் கொள்க.

வேறுபாட்டு அட்டவணை

ux	Δux	$\Delta^2 ux$	$\Delta^3 ux$
1			
	5		
6		0	
	5		2
11		2	
	7		4
18		6	
	13		8
31		14	
	27		16
58		30	
	57		
115			

இவ் வட்டவணையில் 3 ஆம் நிலை வேறுபாடுகள் பெருக்கல் தொடரில் (geometric progression) $r=2$ என்ற பொது விகிதத் தோடு (common ratio) அமைந்திருப்பதைக் காணலாம்.

எனவே, $u_x = a2^x + bx^{(2)} + cx^{(1)} + d$ எனக் கொள்கிறோம்.

$$\therefore \quad \Delta u_x = a(2-1)2^x + 2bx^{(1)} + c$$

$$= a2^x + 2b\, x^{(1)} + c$$

$$\Delta^2 u_x = a(2-1)^2\, 2^x + 2b$$

$$= a2^x + 2b$$

$$\Delta^3 u_x = a(2-1)^3\, 2^x = a2^x$$

இவற்றில் $x = 1$ எனப் பிரதியிட்டு $u_1 = 1$, $\Delta u_1 = 5$, $\Delta^2 u_1 = 0$, $\Delta^3 u_1 = 2$ என்பதை அட்டவணையிலிருந்து கவனித்தால்,

$$1 = 2a + 0\,(b) + c + d$$

$$5 = 2a + 2b + c$$

$$0 = 2a + 2b$$

$$2 = 2a$$

இவற்றிலிருந்து $a=1$, $b=-1$, $c=5$, $d=-6$ என்று பெறுகிறோம்.

எனவே, $u_x = (1)\, 2^x - (1)\, x^{(2)} + 5x^{(1)} - 6$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n} u_x = \left[\frac{2^{(x)}}{2-1} - \frac{x^{(3)}}{3} + 5\,\frac{x^{(2)}}{2} - \frac{6x^{(1)}}{1} \right]_1^{n+1}$$

$$= \left[2^x - \frac{x(x-1)(x-2)}{3} + \tfrac{5}{2}\, x(x-1) - 6x \right]_1^{n+1}$$

$$= 2^{n+1} - \frac{(n+1)(n)(n-1)}{3} + \tfrac{5}{2}(n+1)(n) - 6(n+1) \Big]$$

$$= -\left[2 - \frac{1(1-1)(1-2)}{3} + \tfrac{5}{2}(1)(1-1) - 6(1) \right]$$

$$= \left[2^{n+1} - \frac{(n^3-n)}{3} + \tfrac{5}{2}(n^2+n) - 6n - 6 \right]$$

$$- \left[2 - \tfrac{0}{3} + \tfrac{5}{2}(0) - 6 \right]$$

$$= 2^{n+1} - \frac{n^3}{3} + \tfrac{5}{2} n^2 - \frac{19n}{6} - 2$$

$$\sum_{x=1}^{n} u_x = 2^{n+1} - \tfrac{1}{6}(2n^3 - 15n^2 + 19n) - 2$$

$$= 2^{n+1} - \frac{n}{6}(2n^2 - 15n + 19) - 2$$

பகுதிப் பகுதியாகக் கூட்டுதல் (Summation by parts)

ஒரு தொடரின் உறுப்புகள் இரு சார்புகளின் பெருக்கல்களாக அமையுமெனில், அத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காணப் பின்வரும் முறையான பகுதிப்பகுதியாகக் கூட்டும் முறையைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர் u_x என இருக்கட்டும். இத் தொடரின் உறுப்புகளை $f_1(x)$, $f_2(x)$ என்ற இரு சார்புகளின் பெருக்கல்களாக அமையட்டும். அதாவது, $u_x = f_1(x) f_2(x)$ இதில், $f_1(x) = \Delta g_1(x)$ என்றும் $f_2(x) = \Delta g_2(x)$ என்றும் இருக்கட்டும்.

எனவே,

$$\Delta[f_1(x) g_2(x)] = f_1(x+1) g_2(x_1) - f_1(x) g_2(x)]$$
$$= f_1(x+1)[g_2(x+1) - g_2(x)] + g_2(x)[f_1(x+1) - f_1(x)]$$
$$= f_1(x+1)\Delta g_2(x) + g_2(x)\Delta f_1(x)$$

$$\therefore [f_1(x)+g_2(x)]_1^{n+1} = \sum_{x=1}^{n} [f_1(x+x_1)\Delta g_2(x)] + \sum_{x=1}^{n} [g_2(x)\Delta f_1(x)]$$

அல்லது,

$$\sum_{x=1}^{n} g_2(x)\Delta f_1(x) = [f_1(x) g_2(x)]_1^{n+1} - \sum_{x=1}^{n} [f_1(x+1)\Delta g_2(x)]$$

இச் சூத்திரம் பகுதிப்படுத்தி தொகை காணல் (integration by parts) முறையை ஒத்திருக்கிறது.

மாதிரி 4 : கீழ்க்காணும் தொடருக்கு n உறுப்புகளுக்கு கூட்டல் தொகையைக் காண்க.

$$\frac{4}{1\cdot2\cdot3}+\frac{5}{2\cdot3\cdot4}+\frac{6}{3\,4\,5}+\ldots\ldots$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள முடிவில்லாத் தொடரின் பொது உறுப்பானது,

$$u_x = \frac{x+3}{x(x+1)(x+2)} = (x+3)(x-1)^{(-3)}$$

$(x+3) = g_2(x)$, $\Delta f_1(x) = (x-1)^{(-3)}$ எனக் கொள்க.

$\therefore \Delta g_2(x) = 1$; $f_1(x) = \dfrac{(x-1)^{(-2)}}{-2}$ எனவே பகுதிப்பகுதியாகக் கூட்டும் முறைப்படி,

$$\sum_{x=1}^{n} u_x = \Big[f_1(x)\, g_2(x)\Big]_1^{n+1} - \sum_{x=1}^{n}\Big[f_1(x+1)\,\Delta g_2(x)\Big]_1^{n+1}$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n}\frac{x+3}{x(x+1)(x+2)} = \left[\frac{(x-1)^{(-2)}}{-2}(x+3)\right]_1^{n+1}$$

$$-\left[\sum_{x=1}^{n} - \frac{x^{(-2)}}{-2}\right]$$

$$= \left[\frac{(n)^{-2}}{-2}(n+4) - 0\right] - \left[\frac{x^{(-1)}}{(-2)(-1)}(1)\right]_1^{n+1}$$

$$= \frac{-(n)^{-2}}{2}(n+4) - \left[\frac{(n+1)^{(-1)}}{2} - \frac{(-1)^{-1}}{2}\right]$$

$$= \frac{-(n+4)}{2}n^{(-2)} - \frac{(n+1)^{(-1)}}{2} + \tfrac{1}{2}$$

$$= \frac{-(n+4)}{2}\,\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2(n+2)} + \tfrac{1}{2}$$

$$= \left[-(n+4) - (n+1) + (n+1)(n+2) \right] \Big/ \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2 + n - 3}{2(n+1)(n+2)}$$

தேற்றம் ; $f(x)$ என்பது, x-ன் சார்பென்றும். $\phi(\mathrm{E})$ என்பது, E-ன் பல்லுறுப்புக் கோவையென்றும் இருந்தால்,

$\phi(\mathrm{E})[a^x f(x)] = a^x \phi(a\mathrm{E})[f(x)]$ என்றமையும்.

நிரூபணம் : $\phi(\mathrm{E}) = c_0 + c_1\mathrm{E} + c_2\mathrm{E}^2 + c_k\mathrm{E}^k + \ldots\ldots\ldots$ எனக் கொள்க. இப்பொழுது, $c_k\mathrm{E}^k[a^x f(x)] = c_k a^{x+k} f(x+k)$

$$= a^x c_k a^k f(x+k)$$

$$= a^x c_k a^k \mathrm{E}^k f(x)$$

$$= a^x c_k (a\mathrm{E})^k f(x)$$

$$\therefore \phi(\mathrm{E})[a^x f(x)] = \sum_{k=0}^{\alpha} \left[c_k \mathrm{E}^k [a^x f(x)] \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\alpha} \left[a^k c_k (a\mathrm{E})^k f(x) \right]$$

$$= a^x \sum_{k=0}^{\alpha} c_k (a\mathrm{E})^k f(x)$$

$$= a^x \phi(a\mathrm{E}) f(x)$$

துணைமுடிவு : $(\mathrm{E}-a)^n a^x f(x) = a^x (a\mathrm{E}-a)^n f(x)$

$$= a^x a^n \Delta^n f(x)$$

மாதிரி : மேலுள்ள சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி 2.2 + 6.4 + 12·8 + 20 16 + 30·32 + ... என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் இரு காரணிப்பகுப்புகளின் (factors) பெருக்கலைப் பெற்றுள்ளது. ஒவ்வோர் உறுப்பிலுள்ள பெருக்கல்களிலுள்ள முதல் காரணிகளை மட்டும் கருத்தில் கொண்டு 2, 6, 12, 20, 30 ..என்ற தொடரைக் கருதி வேறுபாட்டு அட்டவணையை அமைப்போம்.

$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
2		
	4	
6		2
	6	
12		2
	8	
20		2
	10	
30		

$$\therefore\ f(x) = f(1) + (x-1)\,\Delta f(1) + \frac{(x-1)(x-2)}{2}\,\Delta^2 f(1)$$

$$= 2 + (x-1)\,4 + \frac{(x-1)(x-2)}{2}\,2 = x^2 + x$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் பொது உறுப்பு $u_x = 2^x (x^2 + x)$

$$\therefore\ \sum_{x=1}^{n} 2^x (x^2+x) = \left[\frac{2^x}{2-1} (1-2\Delta+4\Delta^2)(x^2+x) \right]_1^{n+1}$$

$$= \left\{ 2^x \left[(x^2+x) - 2\Delta (x^2+x) + 4\Delta^2 (x^2+x) \right] \right\}_1^{n+1}$$

$$= \left[2^x \left\{ (x^2+x) - 2(2x+2) + 4\,(2) \right\} \right]_1^{n+1}$$

$$= \left[2^x (x^2 - 3x + 4) \right]_1^{n+1}$$

$$= 2^{n+1} (n^2 - n + 2) - 4$$

பயிற்சி 8

1. u_x என்ற பொது உறுப்புகள் பின்வருமாறு: (a) $x(x-1)(x-2)$, (b) $x(x+1)(x+3)$, (c) $(3x-1)(3x+2)(3x+5)(3x+8)$ இவற்றின் கூட்டல் தொகையைக் காண்க.

2. கீழ்க்காணும் தொடர்களின் n உறுப்புகளுக்குக் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(i) $2\cdot5 + 5\cdot8 + 8\cdot11 + 11\cdot14 + \ldots\ldots$

(ii) $1\cdot3\cdot5 + 3\cdot5\cdot7 + 5\cdot7\cdot9 + \ldots\ldots$

(iii) $\frac{1}{1\cdot4} + \frac{1}{4\cdot7} + \frac{1}{7\cdot10} + \ldots\ldots$

(iv) $\frac{3}{1\cdot2\cdot4} + \frac{4}{2\cdot3\cdot5} + \frac{5}{3\cdot4\cdot6} + \ldots\ldots$

3. கீழ்க்காணும் தொடர்களின் கூட்டல் தொகையை n உறுப்புகளுக்குக் காண்க.

(i) 0, 10, 33, 77, 150 ……

(ii) 5, 10, 17, 28, 47, 82, ……

(iii) 4, 13, 35, 94, 262, 755, ……

4. பொது உறுப்பைக் கண்டபின் கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் கூட்டுத் தொகையை n உறுப்புகளுக்குக் காண்க.

$2\cdot2 + 7\cdot4 + 14\cdot8 + 23\cdot16 + 34\cdot32$

5. ஒரு தொடரின் xஆம் உறுப்பு $\frac{x\cdot2^x}{(x+2)!}$ எனில், அத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையை n உறுப்புகளுக்குக் காண்க.

6. ஒரு தொடரின் x ஆம் உறுப்பு $2^x(x^2+x)$ எனில், அத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையை n உறுப்புகளுக்குக் காண்க.

7. மதிப்பிடுக. $\sum_{x=1}^{n} 4^x \left\{ \frac{x^2}{(x+1)(x+2)} \right\}$

9. முதற்படி வேறுபாட்டுச் சமன்பாடுகள்

(First Order Difference Equations)

$w(x)$ என்பது, x-ன் ஒருமைக் காலத்தை (Period unity) பெற்ற யாதாமொரு (arbitrary) திருப்பு சார்பாக (periodic function) இருக்கட்டும். அதனால் $w(x+1) = w(x)$

$F[x, u_x, w(x)] = 0$ ... (9·1) என்ற தொடர்பை, (relation) செயலி Δ ஐப் பயன்படுத்தி,

$F[x+1, u_{x+1}, w(x)] = F[x, u_x, w(x)]$ ... (9·2)

என்ற தொடர்பைப் பெறுகிறோம் இப்பொழுது $w(x)$ஐ (9·1), (9·2) ஆகியவற்றின்மூலம் நீக்கினால், $\phi(x, u_x, u_{x+1}) = 0$ ... (9·3) என்ற தொடர்பைப் பெறுகிறோம். (9·3) என்ற தொடர்பை முதல் வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு (first order difference equation) என்றும், (9·1) என்ற தொடர்பை முழுமூலம் (complete primitive) என்றும் கூறுகிறோம்.

$u_{x+1} = u_x + \Delta u_x$ என்பதை அறிந்தால் (9·3)-ஐ

$\phi(x, u_x, \Delta u_x) = 0$ ... (9·4) என்ற வடிவத்தில் அமைக்கலாம். (9·3) அல்லது (9·4) என்ற சமன்பாட்டின் வடிவத்தில் வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்டால் (9·1) என்ற வடிவத்தில் முழு மூலத்தைக் காணவேண்டும்.

x-ஐச் சார்பற்ற மாறி என்றும் u_x, $u(x)$ அல்லது u ஐச் சார்ந்த மாறி (dependent variable) என்றும் கொள்வோம்.

மாதிரி 1 : $u_x = wx + w^2$ என்பதை முழு மூலமாகக் கருதி அதன் முறையான வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டை அமைக்கவும்.

$\Delta u_x = w$ என்பதால், இதனை $u_x = wx + w^2$-ல் பிரதியிட $u_x = x\Delta u_x + (\Delta u_x)^2$ என்ற வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டைப் பெறுகிறோம்.

மாதிரி 2 : $u_x = w_1 a^x + w b^x$ என்பதை முழுமூலமாகக் கருதி, அதன் முறையான வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டை அமைக்கவும்.

$$u_x = w_1 a^x + w_2 b^x \Rightarrow u_{x+1} = w_1 a^{x+1} + w_2 b^{x+1}$$
$$\Rightarrow u_{x+2} = w_1 a^{x+2} + w_2 b^{x+2}$$

$w_1 a^x$, $w_2 b^x$ ஆகியவற்றை நீக்கினல்,

$$\begin{vmatrix} u_x & u_{x+1} & u_{x+2} \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix} = 0$$

என்ற வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டைப் பெறுகிறோம். அதாவது, மேலுள்ள அணிக்கோவை விரித்தால் $u_{x+2} - (a+b)\, u_{x+1} + ab u_x = 0$ அல்லது $\Delta^2 u_x - (a+b-2)\, \Delta u_x + (ab-a-b+1)\, u_x = 0$ என்று பெறுகிறோம்.

நேர்க்கோட்டு முதற்படி வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு (Linear First order Difference equation)

முதற்படி நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம்

$a(x)\, u(x+1) + b(x)\, u(x) = c(x)$ ... (9·5) ஆகும்.

இதில், $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ என்பவை x-ன் சார்புகளாகும்.

(13·5)-ஐப் பூர்த்தி செய்யும் $u_1(x)$ என்ற சிறப்புச் சார்பை (Particular function) பெற முடியுமானுல் $a(x)\, u_1\, (x+1) + b(x)\, u_1\, (x) = c(x)$ ... (9·6) என்று பெருகிறோம். இப்பொழுது, $u_x = u_1(x) + v(x)$ என்ற (9·5)-ல் பிரதியிட்டு (9·6) ஐ அதிலிருந்து கழித்தால், $a\,(x)\, v(x+1) + b\, x)\, v(x) = 0$ ... (9·7) என்று பெறுகிறோம். (9·5 -ன் சிறப்புத் தீர்வையும், சமபடித்தான (homogeneous) நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாடான (9·7)-ன் பொதுத்தீர்வையும் கூட்டிய முடிவே (9·5)-ன் பொதுத் தீர்வாகும்.

சமபடித்தான நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாடு (Homogeneous Linear Equation)

சமன்பாடு (9·7) ஐ $a(x)$ ஆல் வகுத்துக் குறியீட்டில் மாறுதல் செய்தால் $u(x+1) = p(x)\, u(x)$ ... (9·8) என்று பெறுகிறோம்.

இதற்குத் தீர்வு காண இதன் இரு மருங்கிலும் மடக்கை செய்தால், மகை $u(x+1)$ — மகை $u(x)$ = மகை $p(x)$ வலப்பக்கமுள்ள சார்பினைக் கூட்டினால், மகை $u(x) = \underset{c}{\overset{x}{S}}$ மகை $p(t)\, \Delta t + w(x)$ என்று பெறுகிறோம். இதில் $w(x)$ என்பது, ஒருமைக் காலத்தைப் பெற்ற x-ன் யாதாமொரு திரும்பு சார்பாகும.

கவனிக்கவும்: இனி $w\,(x)$ என்ற திரும்பு சார்பை w என்று மட்டுமே குறிப்போம்.

$$\text{எனவே,}\quad u(x) = exp\,[\, w + \underset{c}{\overset{x}{S}} \text{ மகை } p(t)\, \Delta t\,]$$

$$\therefore\quad u(x) = w_1 exp\ [\ \underset{c}{\overset{x}{S}} \text{ மகை } p(t)\, \Delta t\,] \qquad \ldots\ldots \quad (9{\cdot}9)$$

இதில், $w_1 = exp\ (w)\ w_1$ என்பது, பகுமுறை (Analytic) எனில், 13·8-ன் பொதுத்தீர்வும் பகுமுறையில் அமையும்.

மாதிரி 3 : $u_{x+1} - \mathrm{A}(x)\ u_x = 0$ என்ற ஒருபடி நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காண்க.

$u_{x+1} - \mathrm{A}(x)\, u_x = 0$ மடக்கை செய்தால்,

மகை u_{x+1} = மகை u_x + மகை $\mathrm{A}(x)$ அல்லது,

மகை u_{x+1} − மகை u_x = மகை $\mathrm{A}(x)$

$\therefore\ \Delta$ மகை u_x = மகை $\mathrm{A}(x) \Rightarrow$ மகை $u_x = \Delta^{-1}$ [மகை $\mathrm{A}(x)$]

அல்லது, $u_x = w_1\ exp\ [\ \Delta^{-1}$ மகை $\mathrm{A}(x)$] இதில் w_1 என்பது, ஒருமைக்காலம பெற்ற யாதாமொரு திரும்பு சார்பாகும.

மாதிரி 4 : $u_{x+1} - 3^x\, u_x = 0$

$\Rightarrow$ மகை$_3\, u_{x+1}$ − மகை$_3\, u_x = x$

அல்லது, Δ மகை$_3\, u_x = x$

$\therefore$ மகை$_3\, u_x = \Delta^{-1} x + w_1 = \dfrac{x^{(2)}}{2} + w_1$

$$= w_2\, 3^{\frac{1}{2}x^2} = w_2\, 3^{\frac{x(x-1)}{2}}$$

ஓரினமில்லாத முதற்படி நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாடு (Non-homogeneous Linear Equation of the First Order)

$a(x)\ u(x+1) + b(x)\ u(x) = c(x)$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுக. இதில் $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ என்பவை x-ன் சார்புகளாகும். $u_1(x)$ என்பது, மேலுள்ள சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வெனில்,

$$a(x)\ u_1(x+1) + b(x)\ u_1(x) = c(x)$$

$u(x) = u_1(x) + v(x)$ என இச் சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டால்,

கிடைப்பது $a(x)\ [u_1(x+1)+v(x+1)] + b(x)\ [u_1(x)+v(x)] = c(x)$

அல்லது $a(x)\ u_1(x+1) + b(x)\ u_1(x)] + a(x)\ v(x+1)$
$$+\ b(x)\ v(x) = c(x)$$

ஆனால், $a(x)\ u_1(x+1) + b(x)\ u_1(x) = c(x)$ என்பதால்,

$a(x)\ v(x+1) + b(x)\ v(x) = 0$ என அமைகிறது.

இது சமபடித்தான சமன்பாடாகும் (Homogenous equation).

மாதிரி 4 : $u(x+1) - au(x) = \cos\ nx$

$u_1(x)$ சிறப்புச் சார்பெனில்,

$u_1(x+1) - a\ u_1(x) = \cos\ nx$

இதில், $u(x) = u_1(x) + v(x)$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$u(x+1) = u_1(x+1) + v(x+1)$

எனவே, $v(x+1) = w(x)\ v(x)$

அல்லது, $v(x) = w(x)\ a^x$

$$\text{ஆனால் } u_1(x) = \frac{\cos(n-1)x - a\cos nx}{1-2a\cos n+a^2}$$

$$\therefore\quad u(x) = \frac{\cos(n-1)x - a\cos nx}{1-2a\cos n+a^2} + w(x)\ a^x$$

காமாச்சார்பின் விகிதமுறு கெழுக்களின்மூலம் தீர்வுகாணுதல் (Solution by Means of the Gamma Function Rational Coefficient)

காமாச்சார்பின் வரையறைப்படி, $u(x+1) = xu(x)$ இதன் சிறப்புத் தீர்வு $u(x) = \Gamma x$ ஆகும்.

$u(x+1) = r(x)\,u(x)$ ... (13·9) என்ற சார்பைக் கருதுக.

இதில், $r(x)$ என்பது, விகிதமுறு சார்பாகும் (Rational function)

$$r(x) = c\,\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)}{(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_e)}$$ எனக் கொள்க.

இதில், $\alpha_1; \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_k$; $\beta_1, \beta_2 \ldots\ldots \beta_e$ என்பவைகள் தனித் தவைகளாகும் (distinct).

ஆனால், $\Gamma(x+1-\alpha_i) = (x-\alpha_i)\,\Gamma(x-\alpha_i)$

$c^{x+1} = c \cdot c^x$ எனவே 13·9 ன் சிறப்புத் தீர்வு

$$u_x = \frac{c^x\,\Gamma(x-\alpha_1)\,\Gamma(x-\alpha_2)\ldots\ldots\Gamma(k-\alpha_k)}{\Gamma(x-\beta_1)\,\Gamma(x-\beta_2)\ldots\ldots\Gamma(x-\beta_e)} \qquad (9\cdot10)$$

என்பது தெளிவாகும். பொதுத் தீர்வைக் காண (13·10) ஐ யாதாமொரு காலவட்ட ஒழுங்கால் (periodic) பெருக்கவேண்டும்.

மாதிரி 5 : $x^2 u(x+1) = 2(x+1)\,u(x)$ என்ற வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காண்க. இதில் $r(x) = \frac{2(x+1)}{x^2}$

எனவே, $u(x+1) = r(x)\,u(x)$ இதற்குக் காமாச் சார்பின் முறையைப் பயன்படுத்தினால் $u(x) = \frac{w\,2^x\,\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)\,\Gamma(x)} = \frac{w_2{}^x\,x}{\Gamma x}$

முழுமையான முதற்படி நேர்கோட்டுச் சமன்பாடு (complete first order linear equation) 9·5-ன் பொது வடிவம் $u(x+1) - p(x)\,u(x) = q(x)$ (13·11) என்றவாறு அமைகிறது. $q(x) = 0$ எனில்,

$$u_1(x) = \exp\left[\,\sum_{c}^{x} \text{மடக்கை}\ p(t)\,\Delta t\,\right]$$ என்ற சிறப்புத் தீர்வைக்

கண்டோம். (9·11) ன் பொதுத் தீர்வைக் காண $u(x) = u_1(x)\,V(x)$ என்று (9·11)-ல் பிரதியிட்டால், $u_1(x+1)\,V(x+1) - p(x)\,u_1(x)\,V(x) = q(x)$ என்று பெறுகிறோம்.

இப்பொழுது, $u_1(x+1)\,\Delta V x = q(x)$

எனவே,

$$V(x) = w + \mathop{S}_{c}^{x} \frac{q(t)}{u_1 (t+1)} \Delta t$$ இவ்வாறாக (9·11)-ன்

பொதுத் தீர்வு

$$u_x = \left[w + \mathop{S}_{c}^{x} \frac{\Gamma q(s)}{c \times p} \int_{c}^{s+1} \text{மகை } p(t)\, \Delta t \right]$$

$$e \times p \left[\mathop{S}_{c}^{x} \text{மகை } p(t)\, \Delta t \right]$$

அமைகிறது. இதில் . என்பது யாதாமொரு மாறிலியாகும்.

மாதிரி 6 : $u(x+1) - e^{2x} u(x) = 3x^2 e^{(x^2 + x + \frac{1}{6})}$

சிறப்புத் தீர்வு $u_1(x) = e \times p\, (x^2 - x + \frac{1}{6})$ ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் $u(x) = V(x)\, e \times p\, (x^2 - x + \frac{1}{6})$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$V(x+1)\ e \times p\, [(x+1)^2 - (x+1) + \frac{1}{6}] - e^{2x}\ V(x)\ e \times p\, (x^2 - x + \frac{1}{6}) = 3x^2\ e^{x^2 + x + \frac{1}{6}}$

$$\Rightarrow V(x+1)\, e^{x^2 + x + \frac{1}{6}} - V(x)\, e^{x^2 + x + \frac{1}{6}} = 3x^2\, e^{x^2 + x + \frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow V(x+1) - V(x) = 3x^2$$

$$\Rightarrow \Delta V(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad V(x) = \Delta^{-1} 3x^2$$

$$\Rightarrow \frac{u(x)}{e^{x^2 - x + \frac{1}{6}}} = \Delta^{-1} 3x^2 \Rightarrow u(x) = e^{x^2 - x + \frac{1}{6}} \left[\Delta^{-1} 3x^2 \right]$$

$$= e^{x^2 - x + \frac{1}{6}} \left[\frac{3x^{(3)}}{3} + w_1 \right]$$

$$u(x) = e^{x^2 - x + \frac{1}{6}} \left[x(x-1)(x-2) + w_1 \right]$$

நிலையெண் கெழுக்களைப் பெற்ற முதற்படி சமன்பாடு (Linear equation of first order constant coefficients) : $u(x+1) - \lambda u(x) = \phi(x)$. இதில், λ என்பது, x-ன் சார்பற்றது. $\phi(x) = 0$ எனில், $u(x) = w\lambda^x$. எனவே சிறப்புத் தீர்வை $u_1(x) = \lambda^{x-1}$ எனக் கொள்ளலாம்.

$u(x) = \lambda^{x-1} V(x)$ எனப் பிரதியிட்டால், $\Delta V(x) = \lambda^{-x} \phi(x)$

$$\text{எனவே, } u(x) = \left[w + \int_c^x \lambda^{-t} \phi(t) \, \Delta t \right] \lambda^{x-1}$$

$\lambda = -1$ எனில், இச் சார்பின் சிறப்பு வகை (Particular case) $u(x+1) + u(x) = 2x^{-1}$ என்றாகிறது. பொதுத் தீர்வு,

$$u(x) = (-1)^{x-1} \left[w + \int_c^{\alpha} \frac{2(-1)^{-t}}{t} \, dt - 2 \sum_{s=0}^{\alpha} \frac{(-1)^{-x-s}}{x+s} \right]$$

ரைம் சார்பு முறை (Prym function method)

$u(x+1) - x\,u(x) - e^{-k} k^x$ என்ற சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு,

$$P(x\,;\,k) = e^{-k} k^x \sum_{s=0}^{\alpha} \frac{k^s}{x(x+1) \ldots (x+s)}$$ என்ற ரைம் சார்பாகும்.

$$u(x+1) - x\,u(x) = R(x) \quad \text{— (9·12)}$$

இதில் $r(x)$ என்பது, ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். (9·12) மாதிரியான சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண ரைம்-சார்பின் முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

$R(x)$-ஐக் காரணீயப் பெருக்கமாக அல்லது நியூட்டன் சூத்திரமாக அமைக்கிறோம்.

அதாவது, $R(x) = \sum_{s=0}^{n} s!\, a_s \binom{x}{s}$ இதில் n என்பது, $R(x)$-ன் படியாகும். இப்பொழுது $f(x) = \left[\sum_{s=0}^{n-1} s!\, b_s \binom{x-1}{s} \right]$ எனக்கொள்க. பிறகு,

$$f(x+1) - x\,f(x) = \sum_{s=0}^{n} s!\,(bs - bs-1) \binom{x}{s}$$

இதில், $bn = b - 1 = 0;\ bs - bs-1 = as;\ s = 1, 2 \ldots n$ என்றமையுமாறு bs களைக் கருதுகிறோம்.

$$bn = 0 \text{ என்பதால், } bs = - \sum_{t=s+1}^{n} a + ; \; s = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$$

இந்தச் சமன்பாடுகள் $f(x)$ ஐ முழுமையாக நிர்ணயிக்கிறது.

$u(x) = V(x) + f(x)$ என எழுதினுல் (9·12)-லிருந்து

$$V(x+1) - xV(x) = \sum_{s=0}^{n} a_s = A \qquad (9\cdot13) \text{ என்க.}$$

$p(x ; 1)$ என்ற 'ரைம்-சார்பு,

$p(x+1; 1) - xp(; 1) = - e^{-1}$ என்ற சமன்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்கிறது. எனவே 9·13 $v(x) = - e \, A \, p(x ; 1)$ என்ற சிறப்புத் தீர்வைப் பெற்றிருக்கிறது. இதன் விளைவாகப் பொதுத் தீர்வு,

$$v(x) = w + (x) \; \Gamma \, e \, A \, p(x ; 1)$$

இவ்வாறாக, 9·12-ன் பொதுத்தீர்வு $u(x) = f(x) + w \, \Gamma(x) - eAP(x ; 1)$ என்றாகிறது.

'பூல்'-ன் தொடர்முறைக் கணிப்பு (Boole's interative process) சார்பற்ற மாறி இல்லாமலிருக்கும்பொழுது $u_{x+1} = \phi(u_x)$ என்ற சமன்பாட்டை 'பூல்' என்பவர் கருதினர்.

அதனுல், $u_{x+2} = \phi^2(u_x)$

இங்கு $\phi^2(u_x) = \phi[\phi(u_x)]$ தொடர்ந்து இம்மாதிரி செய்தால் $u_{x+n} = \phi^n(u_x)$ ஆரம்ப மதிப்பு u_a என்று தெரிந்திருந்தால் $u_{a+n} = \phi^n(u_a)$. ஒரு மாறி ஆரம்ப மதிப்பான a-லிருந்து ஒரு நேர்முக முழு எண்ணுக வேறுபட்டிருந்தால்தான் இம் முறையைப் பயன்படுத்த முடியும்.

மாதிரி 7 :

$$u_{x+1} = 2u_x^2$$

$$u_{x+2} = 2(2u_x^2)^2 = 2^3 u_x^4$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$u_{x+n} = \tfrac{1}{2}(2u_x)^{2^n}$$

வேறுபாட்டு முறையில் தீர்வு (Solution by Differencing) முதற்படி (First order) ஏகபரிமாணமல்லாத (Non-linear)

$f(x, u, \Delta u) = 0$ ... (9·14) என்ற வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டைக் கருதுக. V என்ற x-ன் சார்பை, $\Delta u = V$ என்று எழுதி Δ என்ற செயலினால் செயல்படுத்தினால் $\phi(u, x, V, \Delta V) = 0$ என்ற தொடர்பைப் பெறுகிறோம். இது u-க்குச் சார்பற்றதாக இருந்து தீர்வுகளைக் காண முடியுமானால் வேறுபாட்டுச் சமன்பாடானால் $\phi(x, V, w) = 0$ ... (9·15) என்ற தொடர்பைப் பெறுகிறோம். இதில், w என்பது, யாதாமொரு காலவட்ட ஒழுங்குடையதாகும். (9·14)-க்கும் (9·15)-க்குமிடையே ΔV-ஐ நீக்கினால் (9·14)-ன் மூலம் (primitive) கிடைக்கிறது. 'க்ளாரட்'டின் வகைக் கெழு சமன்பாட்டை (Clairaut's differential equation) ஒத்த சமன்பாடான

$u_x = x\Delta u_x + f(\Delta u_x)$ஐக் கவனிப்போம்.

இதில் $\Delta u_x = V$ எனப் பிரதியிட்டால் $u_x = xV + f(V)$

Δ-ஐச் செயல்படுத்தினால், $0 = (x+1)\Delta v + f(V+\Delta V) - f(V)$

இதில் $\Delta V = 0$ அல்லது, $(x+1) + \dfrac{f(V+\Delta V) - f(V)}{\Delta V} = 0$;

$\Delta V = 0$ எனில், $V = w$. எனவே, $u_x = xw + f(w)$ என்ற மூலத்தைப் (primitive) பெறுகிறோம்.

மாதிரி 8 : $u_x = x\Delta u_x + (\Delta u_x)^2$

இதில், $u_x = xV + V^2$ எனவே, Δஐ இருமருங்கிலும் செயல்படுத்தினால்,

$$(x+1)\Delta V + 2V\Delta V + (\Delta V)^2 = 0 \Rightarrow \Delta V = 0 \text{ அல்லது } \Delta V + 2V + x + 1 = 0$$

$\Delta V = 0$ எனில், $u_x = xw + w^2$

$\Delta V + 2V + x + 1 = 0$ எனில், $V_{x+1} + V_x = -x - 1$

அதாவது, $V = w(-1)^x - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}$ $V - 2$ஐ நீக்கினால்,

$$u_x = [w(-1)^x - \tfrac{1}{4}]^2 - \tfrac{1}{4}x^2$$

"ரிக்கட்டி-ன் வடிவம்" (Riccati's form) : ரிக்கட்டி-ன் வகைகெழு சமன்பாட்டிற்குப் பொருத்தமான வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு,

$u(x)\, u(x+1) + p(x)\, u(x+1) + q(x)\, u(x) + r(x) = 0$ ஆகும்.

இதில், $u(x) = \dfrac{V(x+1)}{V(x)} - p(x)$ என்று பிரதியிட்டால்,

$V(x+2) + [\, q(x) - p(x+1)\,]\, V(x+1) + [\, r(x) - p(x)\, q(x)\,]\, V(x) = 0$ என்ற இரண்டாம்படி வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு (Second order Difference equation) கிடைக்கிறது. இதற்குத் தீர்வு காணும் முறையை அடுத்த அத்தியாயத்தில் பார்க்கலாம்

பலவிதமான வடிவங்கள் (Miscellaneous forms) :

மாதிரி 9 : $u_{x+1}\, u_x\, a_x\, (u_{x+1} - u_x) + 1 = 0$

இதனைத் திரும்ப எழுதினால், $\dfrac{u_{x+1} - u_x}{1 + u_{x+1}\, u_x} = \dfrac{1}{a_x}$

இதில் $u_x = \tan V_x$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{\tan V_{x+1} - \tan V_x}{1 + \tan V_{x+1} \tan V_x} = \frac{1}{a_x}$$

$$\text{அல்லது, } \tan \Delta V_x = \frac{1}{a_x}$$

$$\Delta V_x = \tan^{-1} \frac{1}{a_x}$$

$$\text{எனவே, } u_x = \tan \left[\, w + \int_c^x \tan^{-1} \frac{1}{a_x}\, \Delta x \,\right]$$

மாதிரி-10: $u_{x+1}\, u_x + \sqrt{\left(1 - u_{x+1}^2\right)\left(1 - u_x^2\right)} = a_x$

இதில், $u_x = \cos V_x$ எனப் பிரதியிடுக.

$$u_x = \cos \left[\, w + \mathop{S}_c^x \cos^{-1} a_x\, \Delta x \,\right]$$

பயிற்சி 9

1. கீழ்க்காணும் முழுமூலங்களுக்கான வேறுபாட்டுச் சமன்பாடுகளைக் காணவும்.

(i) $u_x = w2^x - 3(x+1)$ (ii) $u_x = w2^x - 3^x$

(iii) $u_x = w\frac{1}{3^x} + \frac{1}{6}x^{(2)}$ (iv) $u_x = w3^x - 2^x$

(v) $u_x = w(x-1)!$

வேறுபாட்டுச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகாணவும்

2. (i) $u_{x+1} - pa^{2x}u_x \quad qa^{x^2}$

3. (i) $u_x u_{x+1} - au_x + b = 0$

4. $u_{x+1} - u_x \quad wa^x$ இதில் w என்பது ஒருமைக் காலத்தைக் கொண்ட திரும்பு சார்பாகும் ; $a \neq 1$

5. $u_{x+1} - au_x = bx$

6. $u^x{}_{+1} - u_x = 2^x(x^2 - 2x)$

7. $u_{x+1} - \frac{u_x}{x} = 0;\ x > 0$

8. $u_{x+1}u_x - a^x(u_{x+1} - u_x) + 1$

9. $(ax+b)\,u(x+1) + (cx+d)\,u(x) = 0$

10 வேறுபாட்டு முறையைப் பயன்படுத்தி $u_x = x\triangle u_x + (\triangle u_x)^2$-க்கான தீர்வைக் காண்க

10. நிலையெண் கெழுவைப் பெற்ற நேர்க்கோட்டு வேறுபாட்டுச் சமன்பாடுகள்

(Linear Difference equation with Constant Coefficients)

சமபடித்தான சமன்பாடு (Homogeneous Equation) : *n* **படி கொண்ட சமபடித்தான சமன்பாட்டைக் கருதுக.**

$$P_0 u_{x+n} + P_1 u_{x+n-1} + \dots + P_n u_x = 0 \quad \dots \quad (10{\cdot}1)$$

(i) $u_1(x)$ **என்பது** (10·1)**ன் தீர்வென்றால்,** $w_1 u_1(x)$**-ம் அதன் தீர்வாகும்** (ii) $u_1(x)$, $u_2(x)$ .... **என்பவை** (10·1)**-ன் தீர்வுகளானால்,** $w_1 u_1(x) + w_2 u_2(x) + \dots + w_n u_n(x)$**-ம் அதன் தீர்வாகும். முதல் நிலையெண் கெழுவைப் பெற்ற கீழ்க் காணும் சமன்பாடுகளைச் கவனிப்போம்.**

$$C_0 u_{x+n} + C_1 u_{x+n-1} + \dots + C_n u_n = 0 \quad \dots \quad (10{\cdot}2)$$

$$(C_0 E^n + C_1 E^{n-1} + \dots\dots C_n E^0)\, u_x = 0 \quad (10{\cdot}3)$$

C_0, C_1 ...C_n **என்பவை நிலை யெண்களாகும்.** $C_0 \neq 0$; $C_n \neq 0$ **பொதுத்தன்மையை இழக்காமல்** (without loss of generality) $C_0 = 1$ **என்று கொண்டால்** (10·3)**ஐ**

$$(E^n + C_1 E^{n-1} + \dots\dots + C_n)\, u_x = 0$$

அல்லது, $f(E)\, u_x = 0$ **என்று எழுதலாம்.**

இதில், $f(E) = 0$**-ஐ** (10·2)**-ன் துணைச் சமன்பாடு** (auxiliary equation) **என்று கூறுகிறோம்.**

வகை 1 : α_1, α_2 ....α_n **என்ற** *n* **தனிப்பட்ட நேர்க் தீர்வுகளைத் துணைச் சமன்பாடு பெற்றிருந்தால்,**

$$(E - \alpha_1)(E - \alpha_2) \dots\dots (E - \alpha_n)\, u_x = 0$$

அல்லது $(E - \alpha_i) u_x = 0; i = 1, 2, .. n$ அல்லது $u_{x+1} - \alpha_i u_x = 0$ எனவே, $u_x = w_i \alpha_i^x$ என்ற தீர்வைப் பெறுகிறோம். கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு $u_x = w_1 \alpha_1^x + w_2 \alpha_2^x + \ldots\ldots + w_n \alpha_n^x$ ஆகும்.

இதில் w_i என்பது, ஒருமைக் காலவட்டங்களாகும்.

வகை 2 : $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$ என்ற தீர்வுகளைப் பெற்ற துணைச்சமன்பாட்டின் (Auxiliary equation which has repeated real roots)

தீர்வு : $u_x = (w_1 + w_2 x + w_3 x^2 + \ldots + w_n x^{n-1}) \alpha_1^x$

வகை 3 : வெவ்வேறு சிக்கல் தீர்வுகளைப் (complex roots) பெற்ற துணைச்சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காணல் ஒரு துணைச்சமன்பாடு $\alpha_1 = \alpha + i\beta$; $\alpha_2 = \alpha - i\beta$ என்ற சிக்கல் தீர்வுகளைப் பெற்றால் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு

$u_x = r^x (w_1 \cos x\theta + w_2 \sin x\theta)$ என்றாகும்.

இதில், $r = +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

வகை 4: ஒரே மாதிரியான சிக்கல் தீர்வுகளைப் பெற்ற துணைச் சமன்பாட்டின் (Auxiliary equation which has repeated complex roots) தீர்வு $u_x = r^x [(w_1 + w_2 x) \cos x\theta + (w_3 + w_4 x) \sin x\theta]$

இதில் $r = +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

மாதிரி 1 : $u(x+2) - 7u(x+1) + 12u(x) = 0$

துணைச்சமன்பாடு $E^2 - 7E + 12 = 0$

தீர்வு. $u(x) = w_1 3^x + w_2 4^x$

மாதிரி 2 : $u(x+3) - 3u(x+1) - 2u(x) = 0$

துணைச்சமன்பாடு $E^3 - 3E - 2 = 0 \Rightarrow (E+1)^2 (E-2) = 0$

$\therefore \ u(x) = (w_1 + w_2 x)(-1)^x + w_3 2^x$

மாதிரி 3 : $u(x+6)+2u(x+3)+u(x)=0$

துணைச்சமன்பாடு $E^6+2E^3+1=0 \Rightarrow (E+1)^2(E+e^{\frac{2}{3}\pi i})^2$
$(E+e^{-\frac{2}{3}\pi i})^2=0$

$$u(x)=(w_1+xw_2)(-1)^x+(w_3+xw_4)\cos\frac{2\pi x}{3}$$

$$+(w_5+xw_6)\sin\frac{2\pi x}{3}$$

மாதிரி 4 : $u_{x+2}-4u_{x+1}+3u_x=0$

துணைச்சமன்பாடு $E^2-4E+13=0 \quad \therefore E=2\pm 3i$

$$\therefore u_x=13^{\frac{x}{2}}(w_1\cos\theta x+w_2\sin\theta x)\,;\ \theta=\tan^{-1}\left(\tfrac{3}{2}\right)$$

'ரிக்கட்டி'ன் வடிவத்திற்குத் தீர்வு காணல்

$u(x)\,u(x+1)+p(x)\,u(x+1)+q(x)\,u(x)+r(x)=0$ என்ற முதற்படி (First order) சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காண

$u_x=\dfrac{V(x+1)}{V(x)}-p(x)$ என்று பிரதியிட்டால் $V(x+2)$

$+[q(x)-p(x+1)]\,V(x+1)+[r(x)-p(x)q(x)]\,V(x)=0$ என்ற இரண்டாம்படி வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இதற்குத் தீர்வு காணும் முறையை மேலே கண்டோம்.

மாதிரி 5 : $u_{x+1}u_x+(x+2)u_{x+1}+xu_x=-2-2x-x^2$ இது 'ரிக்கட்டி'ன் வடிவத்தில் அமைந்துள்ளது.

$$[u_x+(x+2)]\,u_{x+1}+xu_x=-2-2x-x^2$$

இதில், $u_x=\dfrac{V(x+1)}{V(x)}-(x+2)$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{V(x+1)}{V(x)}\left[\frac{V(x+2)}{V(x+1)}-(x+3)\right]+x\,\frac{V(x+1)}{V(x)}-x^2-2x$$
$$=-2-x^2-2x$$

அல்லது,

$$\frac{V(x+2)}{V(x)}-(x+3)\frac{V(x+1)}{V(x)}+x\,\frac{V(x+1)}{V(x)}+2=0$$

அல்லது $V(x+2)-3\,V(x+1)+2\,V(x)=0$

இதன் துணைச்சமன்பாடு $E^2 - 3E + 2 = 0 \quad \therefore E = 1, 2$

எனவே, $V(x) = w_1 (1)^x + w_2 (2)^x$

$$\therefore u(x) = \frac{V(x+1)}{V(x)} - (x+2) = \frac{w_1 (1)^{x+1} + w_2 (2)^{x+1}}{w_1 (1)^x + w_2 (x)^x} - (x+2)$$

ஓரினமற்ற சமன்பாடுகள் (Non homogeneous equations)

ஓரினமற்ற சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வைக் காண முதலில் அதனோடு ஒன்றி அமைந்துள்ள சமபடித்தான (homogenous) சார்பின் துணைத்தீர்வையும் (complementary function) பின்பு ஓரினமற்ற சார்பின் சிறப்புத் தீர்வையும் (particular integral) கண்டு இவையிரண்டையும் கூட்டவேண்டும். அதாவது, பொதுத் தீர்வு = துணைத்தீர்வு + சிறப்புத் தீர்வு.

சிறப்புத் தீர்வுகளைக் காண இங்கு நாம் இரு முறைகளைப் பயன் படுத்துவோம். (i) 'பூல்'லின் செயலிகள் முறை (Boole's method of operators); (ii) தேராக் குணகம் முறை (method of undetermined coefficients).

பூல்லின் செயலிகள் முறை (Boole's method of operators)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டின் வலப் புறம் பின்வருமாறு அமைந்திருந்தால் இம் முறையைப் பயன்படுத் தலாம்.

(*a*) *x*–ன் பல்லுறுப்புக் கோவை (a polynomial in x)

(*b*) a^x

(*c*) a^x-உடன் *x*-ன் பல்லுறுப்புக் கோவை பெருக்கப்பட்டிருந்தால், $f(E)$ என்பது துணைச் சமன்பாடானால், கொடுக்கப் பட்ட வேறுபாட்டுச் சார்பை $f(E)\,u(x) = \phi(x)$ என்று எழுத லாம். இதில் $\phi(x)$ என்பது, *x*–ன் சார்பாகும். $f(E) = 0$ எனச் செய்து பொதுத் தீர்வை முதலில் கண்டு கொள்ளமுடியும். இப் பொழுது சிறப்புத் தீர்வைக் (particular integral) காணும் முறை யைக் காண்போம்.

$$\text{பூல்லின் வரையறைப்படி } u(x) = \frac{1}{f(E)}\,\phi(x)$$

வகை : $\phi(x) = x^m$, m என்பது பூச்சியமாகவோ அல்லது நேர்முழு எண்ணாகவோ இருக்கலாம்.

$$1+\triangle = E \text{ என எழுதினால் } u(x) = \frac{1}{f(E)}\,\phi(x)$$

$$= \frac{1}{f(1+\triangle)}\,x^m$$

1 என்ற தீர்வுக்குத் துணைச் சமன்பாடு பொருந்தவில்லை எனில்

$f(1+\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots\ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$ ஆகும்.

இதில். $a_0 \neq 0$

மேலும் $\frac{1}{f(1+\lambda)}$ ஐ λ-ன் ஏறுகின்ற அடுக்குகளாக (ascending powers) λ^m வரை அமைந்தால், $\frac{1}{f(1+\lambda)} = b_0 + b_1\lambda$

$$+ \ldots\ldots + b_m\lambda^m + \frac{g(\lambda)\lambda^{m+1}}{f(1+\lambda)} \quad (5)$$

இதில் $g(\lambda)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

எனவே, $1 \equiv f(1+\lambda)\;(b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_m\lambda^m)$

$+ g(\lambda)\;\lambda^{m+1}$ வலப்புறமுள்ள கோவை λ-ன் பல்லுறுப்புக் கோவை என்பதால் Δ என்ற செயலியைச் செயல்படுத்தலாம்.

அதாவது, $x^m = f(1+\lambda)\,(b_0 + b_1\Delta + b_2\Delta^2 + \ldots\ldots b_m\Delta^m)\,x^m$

$$+ g(\Delta)\,\Delta^{m+1}\,x^m$$

ஆனால், $\Delta^{m+1}x^m = 0$ எனவே,

$(b_0 + b_1\Delta + b_2\Delta^2 + \ldots\ldots + b_m\Delta^2)\,x^m$ என்ற சிறப்புத் தீர்வு $f(1+\lambda)\,u_x = x^m$ அல்லது $f(E)\,u(x) = x^m$ என்ற வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்கிறது.

இவ்வாறாக, $f(E)\,u(x) = x^m$ என்ற ஓரினமற்ற வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு $(b_0 + b_1\triangle + b_2\Delta^2 + \ldots\ldots +$

$b_m\triangle^2)\,x^m$ என்றாகும்.

மாதிரி 6 : $u(x+2) + u(x+1) + u(x) = x^2+x+1$

துணைத்தீர்வு காண : துணைச்சமன்பாடு $E^2+E+1 = 0$

அல்லது, $E = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \quad \therefore \alpha = -\frac{1}{2}\;1.\;\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$r = +\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 1;\;\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3})$$

எனவே, துணைத்தீர்வு $= (w_1 \cos x\theta + w_2 \sin x\theta)$ இதில்

$$\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3})$$

சிறப்புத்தீர்வு காண: $\dfrac{1}{f(1+\lambda)} = \dfrac{1}{\lambda^2+\lambda+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{9}\lambda^2 + \ldots\ldots$

எனவே, $\dfrac{1}{f(1+\Delta)}(x^2+x+1) = (\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\Delta + \frac{2}{9}\Delta^2 + \ldots\ldots)$

$$(x^2+x+1) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் முழுமையான பொதுத்தீர்வு

$$u_x = (w_1 \cos x\theta + w_2 \sin x\theta) + \frac{x^2}{3} \quad \frac{x}{3} \quad \frac{1}{9}$$

இதில், $\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3})$

சிறப்பு வகை (Special case) : கொடுக்கப்பட்ட வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டின் துணைச்சமன்பாடு 1 என்ற தீர்வை r-ன் பெருக்கமாகப் பொருத்திக் கொண்டால், சமன்பாடு $f_1(E)(E-1)^r u(x) = x^m$ என்றவாறு அமைகிறது.

இதில் $(E-1)^r u(x) = \Delta^r u(x) V^x$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$f_1(E) V(x) = x^m$ எனக் கிடைக்கிறது. இதற்கு வகை – 1-ல் கூறியுள்ளது போல் வழிமுறைகளைக் கையாண்டால்,

$$V(x) = (b_0 + b_1\Delta + b_2\Delta_2 + \ldots\ldots + b_m\Delta^m) x^m$$

இதை, $V(x) = \alpha_0 \binom{x}{m} + \alpha_1 \binom{x}{m-1} + \ldots + \alpha_m \binom{x}{0}$

என்ற உருவத்தில் எழுதினால் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின்

சிறப்புத் தீர்வை $\Delta^r u(x) = \alpha_0 \binom{x}{m} + \alpha_1 \binom{x}{m-1}$

$+ \ldots\ldots + \alpha_{m-1}\binom{x}{1} + \alpha_m \binom{x}{0}$ லிருந்து பெறலாம்.

ஆனால், $\Delta \binom{x}{k} = \binom{x}{k-1}$ என்பதால், தேவையான

சிறப்புத் தீர்வு $u(x) = \alpha_0 \binom{x}{m+r} + \alpha_1 \binom{x}{m+r-1}$

$+ \ldots\ldots + \alpha_{m-1} \binom{x}{r-1} + \alpha_m \binom{x}{r}$

மாதிரி 7 : $u(x+4) - 5u(x+3) + 9u(x+2) - 7u(x+1)$

$+ 2u(x) = x^3 + 1$ இதில், $f(E) = (E-1)^3 (E-2)$

துணைத்தீர்வு : $= w_1 2^x + (w_2 + w_3 x + w_4 x^2)$

துணைச்சமன்பாடு 1 என்ற தீர்வைப் பொருத்திக்கொண்டுள்ளது.

எனவே, அச் சமன்பாட்டை $(\Delta - 1) \Delta^3 u(x) = x^3 + 1$ என எழுதலாம்.

இதில், $\Delta^3 u_x = V(x)$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$V(x) = \frac{1}{\Delta - 1} (x^3+1) = (-1-\Delta-\Delta^2-\Delta^3)(x^3+1)$$

$$= -(x^3 + 3x^2 + 9x + 14)$$

$$\therefore \Delta^3 u(x) = -6\binom{x}{3} - 12\binom{x}{2} - 13\binom{x}{1} - 14\binom{x}{0}$$

எனவே சிறப்புத்தீர்வு $= -6\binom{x}{6} - 12\binom{x}{5} - 13\binom{x}{4}$

$$- 14\binom{x}{3}$$

$$= -\frac{17}{24} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{40} x^5 - \frac{1}{120} x^6$$

இவ்வாறுகக் கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் பொதுத்தீர்வு

$$u(x) = (w_1 2_x + w_2 + w_3 x + w_4 x^2) - \frac{17}{24} x^3 - \frac{1}{4} x^4$$

$$+ \frac{1}{40} x^5 - \frac{1}{120} x^6$$

வகை 2 : $\phi(x) = a^x$

இங்கு, $f(E)\, u(x) = a_x$ குறியீடுமூலம் $u(x) \div \frac{1}{f(E)} a^x$

ஆனால், $\phi(E)\, a^x = \phi(a)\, a_x$ a யினால் $f(E)$ பூச்சியமாகாமலிருந்தால்,

சிறப்புத்தீர்வு $u(x) = \dfrac{a^x}{f(a)}$. ஏனெனில், $f(E)\dfrac{a^x}{f(a)} = \dfrac{f(a)}{f(a)}\, a^x = a_x$

சிறப்புவகை (Special Case) a என்பது, $f(\rho)$-ன் r-ஆம் படி பூச்சியமெனில், $f(\rho) = (\rho - a)^r f_1(\rho)$

$$\text{இங்கு,}\quad f_1(a) = \frac{f^{(r)}(a)}{Lr}$$

$u(x) = a^x\, V(x)$ எனப் பிரதியிட்டால், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $f_1(E)(E - a)^r a^x V(x) = a^x$ என்றமைகிறது.

ஆனால், $a^x f_1(aE)(aE - a)^r V(x) = a^x$

மேலும், $\Delta = E - 1$

$$a^r\, \Delta^r\, V(x) = \frac{1}{f_1(aE)} \cdot 1 = \frac{1}{f_1(a + a\Delta)} \cdot 1 = \frac{1}{f_1(a)}$$

$$\text{எனவே,}\quad \Delta^r V(x) = \frac{a^{-r}\, \Gamma r}{f^{(r)}(a)} = \frac{a^{-r}\, \Gamma r}{f^{(r)}(a)} \binom{x}{0}$$

$$\text{அல்லது}\quad V(x) = \frac{a^{x-r}\, x^{(r)}}{f^{(r)}(a)}$$

$$\text{தேவையான சிறப்புத் தீர்வு}\quad u_x = \frac{a^{x-r}\, x^{(r)}}{f^{(r)}(a)}$$

மாதிரி 8 : $u_{x+3} - 6\,u_{x+2} + 12\,u_{x+1} - 8\,u_x = 2^x$

துணைச்சமன்பாடு $E^3 - 6E^2 + 12E - 8 = 0$ அல்லது $(E-2)^3 = 0$

துணைத்தீர்வு : $= (w_1 + w_2\, x + w_3\, x^2)\, 2^x$

இங்கு, $f(\rho) = (\rho - 2)^3$; $f^{(3)}(2) = L3$

$$\text{சிறப்புத்தீர்வு}\quad u(x) = \frac{x^{(3)}\, 2^{x-3}}{L\,3} = \binom{x}{3} 2^{x-3}$$

எனவே, முழுமையானப் பொதுத்தீர்வு $u_x = (w_1 + w_2\, x$

$$+ w_3\, x^2)\, 2^x + \binom{x}{3} 2^{x-3}$$

வகை 3 : $\phi(x) = a^x\, R(x)$ இதில், $R(x)$ என்பது, m-படி பல்லுறுப்புக் கோவையாகும் என்க.

$$\therefore \; f(E)\, u(x) = a^x R(x)$$

இதில், $u(x) = a^x V(x)$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$a^x f(aE)\, V(x) = a^x R(x)$$

அல்லது, $f(aE)\, V(x) = R(x)$ இது வகை 1-ஐ ஒத்திருக்கிறது.

மாதிரி 9: $u(x+4) - 7u(x+3) + 18u(x+2) - 20u(x+1) + 8u(x) = x^2 2^x$ முதலில் சிறப்புத் தீர்வைக் காண்போம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை

$(E^4 - 7E^3 + 18E^2 - 20E + 8)\, u(x) = x^2 2^x$ என எழுதலாம்.

அல்லது, $(E-2)^3 (E-1)\, u(x) = x^2 2^x$

இதில் $u(x) = 2^x V(x)$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$8(E-1)^3 (2E-1)\, V(x) = x^2$$

அல்லது,

$$\Delta^3 V(x) = \frac{1}{8(2\Delta+1)} x^2 = \frac{1}{8}(1 - 2\Delta + 4\Delta^2)\, x^2$$

$$= \frac{1}{8}(x^2 - 4x + 6)$$

$$= \frac{1}{4}\binom{x}{2} - \frac{3}{8}\binom{x}{4} + \frac{3}{4}\binom{x}{0}$$

$$\therefore V(x) = \frac{1}{4}\binom{x}{5} - \frac{3}{8}\binom{x}{4} + \frac{3}{4}\binom{x}{3}$$

எனவே, சிறப்புத் தீர்வு

$$= 2^x V^x = 2^x \left[\frac{1}{4}\binom{x}{\ } - \frac{3}{8}\binom{x}{4} + \frac{3}{4}\binom{x}{3} \right]$$

துணைத்தீர்வு காண துணைச் சமன்பாட்டைக்கருதுக அதாவது,

$$(E-2)^3 (E-1) = 0$$

$$\therefore \text{ துணைத்தீர்வு } = (w_1 + w_2 x + w_3 x^2)\, 2^x + w_4 (1)^x$$

முழுமையான பொதுத்தீர்வு

$$u(x) = (w_1 + w_2\,x + w_3 x^2)\,2^x + w_4\,(1)^x + 2^x \left[\frac{1}{4}\binom{x}{5} - \frac{3}{8}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{3}\right)\right]$$

$$= w_4 + 2^x \left[w_1 + w_2 x + w_3\,x^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{5}\right) - \frac{3}{8}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{3}\right)\right]$$

தேராக் குணகம் முறை (Method of undetermined coefficients)

கொடுக்கப்பட்ட வேறுபாட்டுச் சமன்பாட்டின் வலப்பக்கம் ஒரு குறிப்பிட்ட வடிவத்திலிருந்தால், சிறப்புத் தீர்வின் வடிவத்தை ஊகித்து, தேராக் குணகம் முறை மூலம் அச் சிறப்புத் தீர்வைக் காண முடியும்.

$\phi(x) = a^x$ (x-ன் பல்லுறுப்புக் கோவை) என்றால் மட்டுமே இம் முறை பயன்படும். இதற்குச் சில மாதிரிகளைக் காண்போம்.

மாதிரி 10 : $u(x+2) - 6u(x+1) + 4\,u(x) = 10$

$u_1(x) = c$ என்ற நிலையெண்ணைக் கொண்டு முயற்சித்தால்,

$$c - 6c + 4c = 10 \;\Rightarrow\; c = -10$$

எனவே, சிறப்புத் தீர்வு $= C = -10$.

துணைத்தீர்வு காண : துணை வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு

$$E^2 - 6E + 4 = 0$$

$$\therefore E = 3 \pm \sqrt{5}$$

$\therefore$ துணைத்தீர்வு $= w_1\,(3 + \sqrt{5})^x + w_2\,(3 - \sqrt{5})^x$

முழுமையான பொதுத்தீர்வு $u(x) = w_1\,(3 + \sqrt{5})^x + w_2\,(3 - \sqrt{5})^x - 10$

பயிற்சி 10

1. கீழ்க்காணும் வேறுபாட்டுச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்க.

(i) $u_{x+2} - 8\,u_{x+1} + 15\,u_x = 0$

(ii) $u_{x+3} - 3\,u_{x+1} - 2\,u_x = 0$

(iii) $u_{x+2} - 4\,u_x = 0$

(iv) $u_{x+2} - 6\,u_{x+1} + 9\,u_x = 0$

(v) $u_{x+2} - 4\,u_{x+1} + 13\,u_x = 0$

(vi) $u_{x+2} + 9\,u_x = \cos a_x$

(vii) $u_{x+2} - 5\,u_{x+1} + 6\,u_x = 5^x$

(viii) $u_{x+2} - 7\,u_{x+1} + 10\,u_x = (12)\,5^x$

(xi) $u_{x+1}\,u_x + (x+2)\,u_{x+1} + xu_x + x^2 + 2x + 2 = 0$

(x) $u(x+2) - 4u(x+1) + 4\,u(x) = x2^x$

விடைகள்

(Answers)

அணிக்கொள்கை

பயிற்சி 1

1. (i) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 & -2 \\ 3 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} -7 & 16 & -5 & -6 \\ 5 & -15 & 4 & -7 \\ -2 & -4 & -7 & 7 \end{bmatrix}$

2. $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$

3. $AB = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -10 & 2 & 21 \\ -16 & 1 & 27 \\ 2 & -2 & 11 \end{bmatrix}$.

4. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

5. ABஐ வரையறுக்க முடியாது.

6. $AB = 0 = CA$; $BA = \begin{bmatrix} 26 & 7 & -10 \\ 48 & -42 & 60 \\ 40 & -35 & 50 \end{bmatrix} \neq 0$

$AC = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -20 & -20 & 17 \\ -16 & -16 & 14 \end{bmatrix} \neq 0$

8. $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

12. $a = -1, \quad b = 1, \quad c = -2$

14. $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

28 $\begin{bmatrix} 40 & 55 & 40 & 31 & 28 & 19 \\ 30 & 45 & 54 & 39 & 30 & 27 \\ 17 & 30 & 43 & 50 & 33 & 32 \\ 16 & 21 & 8 & 1 & 12 & 17 \end{bmatrix}$

பயிற்சி 2

(1) $\Delta = 0$ (2) $\Delta = 6$ (3) 20 (6) 0 (9) $x = 4$

(12) $|AB| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 36 & 27 & 157 \\ 22 & 13 & 99 \end{vmatrix}$

(13) $\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & 1 & a \\ b^2 & 1 & b \\ c^2 & 1 & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

(15) $\begin{vmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 1 & 2b & b^2 \\ 1 & 2c & c^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

பயிற்சி 3

(1) (i) 3, (ii) 3, (iii) 4, (iv) 2, (v) 1

(2) $P(A) = 4$

(3) (i) சம மாற்று அணிகளல்ல.

(ii) சம மாற்று அணிகளல்ல.

பயிற்சி 4

8. (i) $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{11} & -\frac{1}{22} & \frac{2}{11} \\ \frac{4}{11} & -\frac{7}{22} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} \frac{11}{3} & -3 & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & 3 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, (iv) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(v) $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -8 & 7 & 5 \\ 6 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, (vi) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -11 & 10 \\ 13 & 25 & -23 \\ -3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$

(vii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(viii) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & -\cos(\alpha-\beta+\gamma) & \sin(\alpha-\beta+\gamma) \\ \sin\alpha & \cos\alpha & -\sin(\alpha-\beta+\gamma) & -\cos(\alpha-\beta+\gamma) \\ 0 & 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$

(ix) $\begin{bmatrix} a-ib & -c-id \\ c-id & a+ib \end{bmatrix}$, (x) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(11) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -5 & 11 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$, (12) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

(13) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & -10 \end{bmatrix}$, (14) $\begin{bmatrix} 0{\cdot}4 & 0{\cdot}4 & -0{\cdot}6 \\ -0{\cdot}6 & 0{\cdot}4 & 0{\cdot}6 \\ 0{\cdot}4 & -0{\cdot}6 & 0{\cdot}4 \end{bmatrix}$

(20) $\begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & 18 \end{bmatrix}$, (22) $\begin{bmatrix} a^{-1} & 0 & -a^{-1}k \\ 0 & 0 & c^{-1} \\ 0 & b^{-1} & -b^{-1}h \end{bmatrix}$

(24)

$$A = \pm\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

பயிற்சி 5

1. (i) $x = -\frac{10}{7}c, \quad y = \frac{8}{7}c, \quad z = c$

(ii) $x = -3a, \quad y = 0, \quad z = a$

(iii) $w = z, \quad x = 0, \quad y = 0$

(iv) $x = \frac{211}{9}k, \quad y = 4k, \quad z = \frac{7}{9}k, w = k$

(v) $x = y = z = w = 0$

2. (i) $x = \frac{17 - 7k}{3}, \quad y = \frac{4k - 5}{3}, \quad z = k$

(ii) $x_1 = -x_2 = 1, \quad x_3 = -x_4 = 2$

(iii) $x = \frac{7 - 16k}{11}, \quad y = \frac{3 + k}{11}, \quad z = k$

(iv) $x = -1, \quad y = 4, \quad z = 4$

(v) $x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{3}{2}, \quad z = \frac{5}{2}$

3. (i) $x = \frac{9}{14}, \quad y = \frac{2}{7}, \quad z = \frac{31}{14}$

(ii) $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$

(iii) $x = \frac{9}{3}, \quad y = \frac{1}{7}, \quad z = \frac{15}{13}$

(iv) $x = 1, \quad y = 0, \quad z = -57$

(v) $x = \frac{225}{117}, \quad y = \frac{24}{39}, \quad z = 0$

4. (i) $x = 2, \quad y = 1, \quad z = -2$

(ii) $x = \frac{18 + 7t}{11}, \quad y = \frac{8 + 19t}{11}, \quad z = t$

(iii) முதல் சமன்பாடே மற்றச் சமன்பாடுகளாகும்

(iv) தீர்வுகள் கிடையாது.

5. $x_3 = 2, \quad x_4 = -2; \quad b_1 = 0, b_2 = 4$

பயிற்சி 6

(1) $\alpha = \beta + \frac{n\pi}{2}$; $n = 0, 1, 2 \ldots\ldots$

(3) பிம்பம் = $\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

பயிற்சி 7

1. $\lambda = 1, 1, 5$; $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $\lambda = 6, 1$; $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

3. (i) $\frac{1}{2} [-A^2 + 6A - 7I]$

   (ii) $\frac{1}{11} [A^2 - 3A - 7I]$

4. $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 2$, $Kn = \frac{1}{5} (7^n - 2^n)$,

   $M^n = k_n \begin{bmatrix} 5-\lambda_1 & 2 \\ 3 & 4-\lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1{}^n & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^n \end{bmatrix}$

5. $P^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

பயிற்சி 8

(1) (i) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

(2)
(i) $P = 1, \quad N = 1, \quad r = 2, \quad \sigma = 0$
(ii) $P = 1, \quad N = 1, \quad r = 2, \quad \sigma = 0$
(iii) $P = 2, \quad N = 2, \quad r = 4, \quad \sigma = 0$
(iv) $P = 1, \quad N = 2, \quad r = 3, \quad \sigma = -1$
(v) $P = 2, \quad N = 0, \quad r = 2, \quad \sigma = 2$
(vi) $P = 3, \quad N = 0, \quad r = 3, \quad \sigma = 3$

(3) (i) $f_3 = 2X_1^2 - 15X_2^2 - \frac{10}{3}X_3^2$, இதில்

$$X_1 = x_1 + 3_2 x_2 + 2x_3$$
$$X_2 = x_2 + \tfrac{2}{3} x_3$$
$$X_3 = x_3$$

(ii) $f_3 = 2X_1^2 + 2X_2^2$,

இதில் $X_1 = x_1 - \frac{1}{2} x_3$,

$$X_2 = x_2 + \frac{1}{2} x_3$$

(iii) $f_3 = 2Y_1^2 - 2Y_2^2 + 2Y_3^2$, இதில் $Y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$,
$Y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - 2x_3)$ $y_3 = x_3$

(7) (i) நிச்சய நேர்க்கோவை (ii) அரைநிச்சய நேர்க்கோவை
(iii) இரண்டுமல்ல (iv) நிச்சய நேர்க்கோவை
(v) இரண்டுமல்ல (vi) அரைநிச்சய நேர்க்கோவை

திட்டமான வேறுபாடுகள்

பயிற்சி 1

(1) $u_8 = 512$

(2) $u_6 = 126$

(3) (a) -36, (b) $[e^a - 1]^n e^{ax+b}$

(c) $u_x \Delta v_x + v_{x+1} \Delta u^x$

(d) $(-1)^n n! \, h^n (x-1)^{-(n+1)}$

(e) $6x$

(f) $\left(2\sin\frac{b}{2}\right)^n \sin\left[a + bx + n\frac{(b+\pi)}{2}\right]$

(g) $a^{bcx}(b^c - 1)^2$

(h) $2\sin\frac{b}{2}\sin\left(a + \frac{b}{2} + bx\right)$

(8) $y = x^2 + x + 1$

(9) $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$

(10) $2x^{(3)} + 3x^{(2)} + 2x^{(1)} + 10$, $\Delta f(x) = 6x^{(2)} + 6x^{(1)} + 2$

$\Delta^2 f(x) = 12x^{(1)} + 6$, $\Delta^3 f(x) = 12$

(11) $an!$

(12) (i) -161, (ii) 20

(17) (i) $u_x = 2^x$, (ii) $u_x = 3^x$, (iii) $u_x = \frac{1}{3}x^{(3)} + \frac{1}{2}x^{(2)}$

பயிற்சி 2

(1) (a) 465, (b) 441, 653

(2) 3·1234, 3·2039, 3·2914, 3·3865, 3·4898, 3·6019, 3·72584.

(5) 53·6 (ஆயிரங்கள்)

(6) 1·0811

(9) $l_{35} = 394$, $l_{42} = 326$, $l_{47} = 274$

(10) (i) 30, (ii) 540, (iii) 240, (iv) 120, (v) 1.

(15) 46·764

பயிற்சி 3

(6) 2·8169

(7) 2300

(8) $(x-5)^3 + 17(x-5)^2 + 98(x-5) + 194$

(9) $f(5) = 33$, $f(6) = 67$

(13) (i) $x^3 + x^2 - x + 2$

(ii) $x^3 - x^2 + 3x + 8$

(15) 0·6031444

(16) 3·21556

(17) 77·43

பயிற்சி 4

(1) $y_{11} = 2196$, $y_{16} = 1786$

(5) 16·9216

(6) 6

(7) 111·8749

(8) 33

(9) (*a*) 0·38891, (*b*) 0·38873

(10) 2·52825

பயிற்சி 5

(1) (ii) 2·8, (2) 82·8, (3) 37·2, (4) 3·091, (5) 1·109, (6) 0·4769, (7) 0·67239, (8) 40·1, (10) 1·6375, (11) 9·8860, (12) 2·153, (14) (x_3 = 0·2268461, y_3 = 0·3697895) (15) −0·649416, (16) 1.997372, (17) 0·25865, (18) 1·44575, (19) 0·476936, (20) 0·6071381, (21) 3·284, (22) 158·0 (23) 0·57936 (24) 0·331, (25) 0·327, (26) 2·692

பயிற்சி 6

(4) $f'(0·6) = 2·644238$, $f''(0·6) = 3·644238$

(5) 233. (6) 2·833,

(7) $f'(50) = 0·02455$, $f''(50) = -0·0003$

(8) $f'(1·35) = 29·32816$, $f''(1·35) = 71·305$

(9) $f'(3·0) = 1·5367$, $f''(3·2) = 1·58963$

(10) $f'(440) = 0·001987$, $f''(440) = -0·0000022$

(11) $f'(2·1) = 1·66817$, $f''(2·1) = 1·21$

(12) $f'(8) = 0·09859$

(13) $f'(1{\cdot}3) = -0{\cdot}27279$, $f''(1{\cdot}3) = 0{\cdot}274918$

(14) $f'(6) = 54$, $f''(6) = 26$

(15) 5·6972

(16) 0·4623

(17) ஜீன் 22 $6^h\ 5^m\ 21{\cdot}9^s$

(18) நீசம் $f(0) = 0$

$f(4) = 0$

உச்சம் $f(2) = 16$

பயிற்சி 7

(1) 0·9921, (4) 710 சதுர அடி, (6) 1·300,

(7) 3087 m/sec^2, (9) ஸிம்சன் விதிப்படி 1·505103,
வெடிலின் விதிப்படி 1·505103,

(10) 0·92703608, (11) 293·4, (12) 1·0101996,

(16) 3·0370513, (17) 0·78539817,

(18) 0·0083129288, (19) 0·004999833,

(20) 0·00000028, (21) 17·2811438,

(24) 0·0102512, (26) 0·001670775.

(27) 0·0102512, (28) 0·5236

பயிற்சி 8

(1) (a) $\frac{1}{4}n(n+1)(n-1)(n-2)$,

(b) $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+13)$

(c) $\frac{1}{15}\left\{(3n-1)(3n+2)(3n+5)(3n+8)(3n+11)+880\right\}$

(2) (i) $n(3n^2+6n+1)$,

(ii) $\frac{1}{8}\left[n(2n-1)(2n+2)(2n+3)(2n+5)+15\right]$

(iii) $\frac{n}{3n+1}$, (iv) $\frac{5}{2} - \frac{(2n+5)}{2(n+1)(n+2)}$

(3) (i) $\frac{1}{6} n(n-1)(2n^2+3n+6)$

(ii) $2^{n+1} - 2 + \frac{3}{2} n(n+1)$

(iii) $\frac{1}{2}(3^{n+1} - 3) + \frac{n}{6}(n^2 + 6n - 1$

(4) $n^2 \, 2^{n+1}$

(5) $1 - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$

(6) $2^{n+1}(n^3 - 3n^2 + 10n - 14) + 28$

(7) $\frac{2}{3} + \frac{4^{n+1}}{2}\left(1 - \frac{3}{n+2}\right)$

பயிற்சி 9

1. (i) $u_{x+1} - 2u_x = 2^x$

(ii) $u_{x+1} - 2u_x = 3^x$

(iii) $3u_{x+1} - u_x = x$

(iv) $u_{x+1} - 3u_x = 2^x$

(v) $u_{x+1} - xu_x = 0$

2. $u_x = \frac{w_1 + w_2 \cdot 2^{x+1}}{w_1 + w_2 \, 2^x} - (x+2)$

3. $u_x = w_1 \left(\frac{-b}{a+b}\right) - \frac{1}{a+2b}$

4. $u_x = \frac{w \, a^x}{a-1} + w_1$

5. $u_x = a^x \, w(x) - \frac{bx}{a-1} - \frac{b}{(a-1)^2}$

6. $u_x = (x^2 - 6x + 10) \, 2^x + w^1(x)$

7. $u_x = \frac{w}{(x-1)!}$

8. $$u_x = \tan\left[w + \sum_{c}^{x} \tan^{-1}\frac{1}{ax}\,\Delta_x\right]$$

9. $$u_x = w(x)\left(-\frac{c}{a}\right)^x \frac{\Gamma\left(x+\frac{d}{c}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{b}{a}\right)}$$

10. $$u_x = \left[w(-1)^x - \frac{1}{4}\right]^2 = \frac{x^2}{4}$$

பயிற்சி 10

(1) $u_x = w_1 3^x + w_2 5^x$

(2) $u_x = (w_1 + w_2 x)(-1)^x + w_3 2^x$

(3) $u_x = w_1(-2)^x + w_2(2)^x$

(4) $u_x = (w_1 + w_2 x)\, 3^x$

(5) $u_x = 13^{\frac{x}{2}}(w_1 \cos x\phi + w_2 \sin x\phi)$,

இதில் $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$

(6) $$u_x = w_1 \cos 3x + w_2 \sin 3x + \frac{\cos^a(x-2) - 9\cos ax}{82 - 18\cos 2a}$$

(7) $$u_x = w_1 2^x + w_2 3^x + \frac{5^x}{6}$$

(8) $$u_x = w_1 2^x + w_2 5^x + \frac{4}{5}x\, 5^x$$

(9) $$u_x = \frac{w_1 + w_2 \cdot 2^{x+1}}{w_1 + w_2 \cdot 2^x} - (x+2)$$

(10) $u_x = (w_1 + w_2 x)\, 2^x + x(x-1)(x-2)\, 2^{x-3}$

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்
(BIBLIOGRAPHY)
அணிக்கொள்கை
(Matrix Theory)

Aitken, A. C., 'Determinants and Matrices', 8th Edition, New York, Inter Science, 1954.

Birkoff, G. and Maclane, S., 'A Survey of Modern Algebra', (revised) New York, Macmillan, 1953.

Bellman, R., 'Introduction to Matrix Analysis', New York, McGraw-Hill, 1960.

Dwyer, P. S., 'Linear Computations', John Wiley, New York, 1951.

Ferrar, W. L., 'Algebra, A Textbook of Determinants, Matrices and Algebraic Forms', Oxford, Clarandon Press, 1941.

Finkbeiner, D. T., 'Matrices and Linear Transformations', San Francisco, Freeman, 1960.

Gant Matcher, F. R., 'The Theory of Matrices', Volumes I and II, New York, Chelsea, 1959.

Hohn. Franz, E., 'Elementary Matrix Algebra', 2nd Edition, Amerind Publishing Co., (Pvt.) Ltd., 1971.

Hoffman, K. and Kunze, R., 'Linear Algebra', Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1961.

Mac Duffee, C. C., 'An Introduction to Abstract Algebra', New York, Wiley, 1940.

Mirsky, L., 'An Introduction to Linear Algebra', Oxford Press, 1955.

Rao, C. R.. 'Linear Statistical Inference and its Applications', John Wiley and Sons, 1973, New York.

Turnbull, H. W., 'Theory of Determinants, Matrices and Invariants', London, Blackie, 1928, New York, Dover, 1960.

திட்டமான வேறுபாடுகள்
(Finite Differences)

Boole George, 'A Treatise on the Calculus Finite Difference', G. E. Stechert, New York, 3rd Edition, (Reprint of 1872, 2nd Edition), 1926.

Conte, S. D., 'Elementary Numerical Analysis', 1965.

Fort, Tomlinson, 'Finite Differences and Difference Equations in the Real Domain', Oxford University Press, London, 1948.

Goldberg, S., 'Introduction to Difference Equations,' New York, Wiley, 1958.

Hartree, D. R., 'Numerical Analysis Oxford', Clarandon Press, 1952.

Jordan, Charles, 'Calculus of Finite Differences', Chelsia Publishing Company, New York, 2nd Edition, 1947.

Khabaza, I., 'Numerical Analysis', 1965.

Kunz, K. S., 'Numerical Analysis', New York, McGraw Hill, 1957.

Milne, William Edmund, 'Numerical Calculus', Princeton University Press, Princeton, 1949.

Milne, Thomson, L. M.. 'The Calculus of Finite Differences', Macmillan and Company, London, 1933.

Ralston, A., 'A First Course in Numerical Analysis', 1965.

Richardson, C. H., 'An Introduction to the Calculus of Finite Differences', D, Van Nostrand Company, New York, 1954.

Scarbourough, J. B., 'Numerical Mathematical Analysis', Oxford Book Company, 1964.

Stark, P. A., 'Introduction to Numerical Methods,' 1970.

பத்திரிகைகளின் பட்டியல்
(List of Journals)

S. N. Afriat, 'The Quadratic form Positive Definite on a Linear Manifold', Proc. Cambridge. Phil. Soc., Vol. 47, pp. 1-6, 1951.

Chao Ko and H. C. Lee, 'A Further Generalisation of the Hamilton-Cayley Theorem', J. London Maths. Soc., Vol. 15, pp. 153–158, 1940.

G. Debreu and I. N. Herstein, 'Non-negative Square Matrices', Econometrica, Vol. 21, pp. 597–607.

M. P. Drazin, 'A Note on Skew-Symmetric Matrices', Math. Gaz. Vol. XXXVI, pp. 253–255, 1952.

I. J. Good, 'A Note on Positive Determinants', J. London, Math. Soc., Vol. 22, pp. 92–95, 1947.

F. A, Graybill and G. Marsaglia, 'Idempotent Matrices and Quadratic Forms in the General Linear Hypothesis,' Ann. Math. Stat., Vol. 28, pp. 678–686, 1957.

D. Greenspan. 'Methods of Matrix Inversion,' Ann. Math. Monthly, Vol. 62. pp. 303–319, 1955.

P. D. Lax, 'Differential Equations, Difference Equations and Matrix Theory', Comm. Pure Appl. Math., Vol. XI, pp. 175–194, 1958.

R. E. A. C. Paley, 'On Orthogonal Matrices', J. Math. and Physics, Vol. 12, pp. 311–320, 1933.

W. V. Parker, 'Characteristic Roots and Fields of Value of a Matrix,' Bull. Ann. Math. Soc., Vol. 57, pp. 103–108, 1951.

W. E. Roth, 'A Solution of the Matrix Equation P(X) = A', Trans. Ann. Math. Soc., Vol. 30, pp. 597–599, 1928.

O. Taussky, 'Commutativity in Finite Matrices', Amer. Math. Monthly, Vol. 64, pp. 229–235, 1957.

J. Von Neumann and H. Goldenstine, 'Numerical Inverting of Matrices of higher Order', Bull. Ann. Math. Soc., Vol. 53, pp. 1021–1099, 1947.

H. Wielandt, 'An Extremum Property of Sums of Eigen Values', Proc. Ann. Math. Soc., Vol. 6, pp. 106–110, 1955.

கலைச்சொற்கள்

A

Absolute convergence — அறவொருங்கல், அறக்குவிதல்
Add — கூட்டு
Addition — கூட்டல்
Addition vector — 'வெக்டர்' கூட்டல், திசைக் கூட்டல்
Adjacent — அடுத்துள்ள
Admissible solution — ஏற்கத்தக்க தீர்வு
Algebra — இயற்கணிதம்
Algebraic expression — இயற்கணிதக் கோவை
Algebraic function — இயற்கணிதச் சார்பு
Algebraic operations — இயற்கணிதச் செயல்கள்
Algebraic operators — இயற்கணிதச் செயலிகள்
Algebraic symbol — இயற்கணிதக் குறி
Alternate — ஒன்றுவிட்ட
Alternating series — ஆடற்றொடர்
Amount — தொகை, கூட்டுத்தொகை, மொத்தத்தொகை
Analysis — பகுப்பாய்வு பகுவியல்
Answer — விடை
Anti-clockwise — இடஞ்சுழியாக
Approximate — தோராயமான
Approximate integration — தோராயமாகத் தொகையிடல்
Approximate value — தோராய மதிப்பு
Approximation — தோராயம்
Approximation – successive — அடுத்தடுத்த தோராய மதிப்பு
Arbitrary — யாதாமொரு, ஏதாமொரு
Arguement of a function — சார்பின் மாறி
Arithmetic progression — கூட்டுவிருத்தி, கூட்டுத் தொடர்
Arrays — வரிசைகள்
Ascending — ஏறுகின்ற

Ascending order — ஏறுவரிசை
Associative law — சேர்ப்பு விதி
Assumption — தற்கோள்
Asymmetrical — சமச்சீரில்லாத
Auxilliary equation — துணைச்சமன்பாடு
,, function — துணைச்சார்பு
Average — சராசரி (பொதுப்படை அளவை)
Axis — அச்சு, ஆயம்
,, major — பேரச்சு, நெட்டச்சு
,, minor — சிற்றச்சு, குற்றச்சு

B

Backward differences — பின்னோக்கு வேறுபாடுகள்
Bilinear transformation — இரு நேர்க்கோட்டு மாற்றம் (இஃது ஒருபடிச் சார்புகளின் விகித மாற்றம்)
Bisect — இரு சமக்கூறிடு
Bisection — இரு சமக்கூறிடல்
Bordering a determinant — ஓர் அணிக்கோவையைக் கரையிடுகின்ற

C

Calculate — கணக்கிடு
Calculation — கணக்கீடு, கணிப்பு
Calculus — நுண்கணிதம்
,, differential — வகை நுண்கணிதம்
,, integral — தொகை நுண்கணிதம்
Canonical form — நியமன வடிவம்
Case — வகை
,, ambiguous — ஈரடி வகை
,, general — பொது வகை
,, particular — குறிப்பிட்ட வகை
,, special — சிறப்பு வகை
Central axis — மைய அச்சு
,, difference — மைய வேறுபாடு
,, operator — மைய வித்தியாசச் செயலி
Centre — மையம்
Characteristic (log) — மடக்கை (முழுவெண்)
Characteristic equation — சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு

Characteristic - roots — சிறப்பு மூலங்கள், தனித் தன்மை மூலங்கள்
Coefficient — குணகம், கெழு
,, detached — பிரித்த குணகம், தனிக்கெழு
,, differential — வகைபீட்டுக் குணகம், வகைக் கெழு
,, undetermined — தேராக் குணகம்
Cofactor — இணைச்சினை, இணைக்காரணி
Coincide — பொருந்து, பொருத்து
Coincident roots — சமமான தீர்வுகள்
Column — நிரல், பத்தி, கலம்
,, matrix — ஓர் அணியின் நிரல்
,, vector — நிரல் வெக்டர்
Combination — சேர்மானம், அசர்வு
Commensurable — பொதுவளவுள்ள
Common - difference — பொது வித்தியாசம்
,, divisor — பொது வகுக்கும் எண்
Commutative law — பரிமாற்று விதி
Complementary — நிரப்புகின்ற, நிரப்புயம்
,, function — துணைத்தீர்வு
,, primitive — முற்றிய மூலி
Complex number — சிக்கல் எண்
,, root — சிக்கல் மூலம்
,, terms — சிக்கல் உறுப்புகள்
,, variable — சிக்கல் மாறி
Component — கூறு, பிரிவு
Concomitant — உடன் இயைகின்ற
Conditions necessary and sufficient — வேண்டிய, போதிய நிபந்தனைகள்
Conformable — அனுசரிக்கும்
Conjugate — இணை
Conjugate roots — இணைமூலங்கள்
Constant — மாறா, மாறாத, மாறிலி, நிலையெண.
Constant integration — தொகையீட்டு நிலையெண்
Continuity — தொடர்ச்சி
Continuous — தொடர்ச்சியான
Continuous function — தொடர்புடைச் சார்பு
Continuous variable — தொடர் மாறி
Converge — ஒருங்கு, குவி

Convergence — ஒருங்கல், குவிதல்
Convergent — ஒருங்கும்
Convergent series — ஒருங்கு தொடர்

D

Decrease — குறைதல்
Decreasing function — குறையுஞ் சார்பு
Define — வரையறு
Degree of accuracy — செம்மைப் படித்தரம்
Degree of an equation — சமன்பாட்டுப் படி
Dependent function — சார்புடைச் சார்பு
Derivative — வகைக்கெழு
Difference — வித்தியாசம், வேறுபாடு
,, advancing — முன்னேறு வேறுபாடுகள்
,, adjusted — சரிசெய்த வேறுபாடு
,, backward — பின்னோக்கு வேறுபாடு
,, central — மைய வேறுபாடு
,, common — பொது வித்தியாசம்
,, divided — விகித வேறுபாடு, வகுத்த வேறுபாடு
,, finite — திட்டமான வேறுபாடு
,, equation — வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு
,, operator — விதரச் செயலி
Differential – coefficient — வகையீட்டுக் குணகம், வகைக்கெழு, வகையீட்டுக் கெழு
Differentiate — வகையீடு காண்
Differentiation — வகையிடல்
Distribution law — பரவு விதி, பங்கீட்டு விதி
Diverge — விரி
Divergent — விரிகின்ற, விரியும்
Divergent series — விரிதொடர்

E

Echelon form — ஏறுபடி அணிவடிவம்
Eigen values — ஐகன் மதிப்புகள்
Element — மூலக உறுப்பு
Elementary transformation — தொடக்கத்திற்குரிய உருவ மாற்றங்கள்
Element of a determinant — ஓர் அணிக்கோவையின் மூலகம்
Eleminate — நீக்கு, விலக்கு
...y — சார்பலன்

Equation	—	சமன்பாடு
,, auxilliary	—	துணைச்சமன்பாடு
,, cubic	—	முப்படிச் சமன்பாடு
,, linear	—	ஒருபடிச் சமன்பாடு
,, quadratic	—	இருபடிச் சமன்பாடு
,, vectorial	—	வெக்டர் சமன்பாடு
Error	—	வழு, பிழை
Error – truncation	—	துண்டித்தலின் பிழை
Evaluate	—	மதிப்பீடு
Even function	—	இரட்டைச் சார்பு
Expand	—	விரி
Exponent	—	அடுக்குக் குறி
Expression	—	கோவை
Extrapolation	—	புறச்செருகல்

F

Factor	—	பொதுச்சினை, காரணிப் பகுப்பு
Factorial	—	காரணீயப் பெருக்கம்
Finite differences	—	திட்டமான வேறுபாடுகள்
First approximation	—	முதல் தோராயம்
Form	—	வடிவம், உருவம், அமைப்பு
Formula	—	சூத்திரம், வாய்பாடு
,, backward difference	—	பிற்போக்கு வேறுபாட்டுச் சூத்திரம்
,, forward difference	—	முற்போக்கு வேறுபாட்டுச் சூத்திரம்
,, quadrature	—	பரப்புகாண் சூத்திரம்
Function	—	சார்பு சார்பலன்
,, complementary	—	நிரப்புச் சார்பு
,, odd	—	ஒற்றைச் சார்பு
,, rational integral	—	விகிதமுறு முழுச்சார்பு
,, transcendental	—	அத்தச்சார்பு, கடந்தசார்பு

G

General solution	—	பொதுத்தீர்வு
Generating	—	பிறப்பிக்கின்ற

H

Homogeneous	—	சமபடித்தான, ஓரினமான, ஒருபடித்தான
Homogeneous function	—	ஒருபடித்தான சார்பு

I

Implies — உணர்த்துகிற
Indefinite form — வகையறுக் கோவை
Imaginary root — கற்பனை மூலம்
Incommensurable — பொதுவளவற்றது
Independent variable — சாராமாறி
Integer — முழு எண்
Integral — தொகையீடு, தொகை
,, definite — வரையறுத்த தொகை, வரையுட்படுதொகை
,, indefinite — வரையறுத் தொகை
Integrand — தொகைச்சார்பு
Integrate — தொகை காண்க
Integration — numerical — எண்வழித் தொகை காணல்
,, term by term — தொடர் உறுப்புத் தொகை காணல்
,, by parts — பகுதிப்படுத்தித் தொகை காணல்
Interpolation — இடைச்செருகல்
,, direct — நேரடி இடைச்செருகல்
,, inverse — எதிர்மாறு இடைச்செருகல்
,, linear — நேர்கோட்டு இடைச்செருகல்
,, with equal intervals — சம இடைச்செருகல்
,, with unequal intervals — அசம இடைச்செருகல்
,, formula — இடைச்செருகல் சூத்திரம்
Intersect — வெட்டு
Interval — இடைவெளி
Iterative process — தொடர்முறைக் கணிப்பு

J

Jacobian (or) functional determinant — ஜாக்கோபியன் அல்லது சார்பு அணிக்கோவை

L

Law, associative — தொகுப்பு விதி
,, commutative — மாற்று விதி
,, distributive — பங்கீட்டு விதி
Leading diagonal — பிரதான மூலைவிட்டம்

Lemma	—	துணைக்கோட்பாடு, உதவித் தேற்றம்
Line vector	—	கோட்டடை வெக்டர், திசையி'
Linear	—	நேர்கோட்டுக்குரிய, ஒருபடிக் குரிய, நீட்டலுக்குரிய
Linear transformation	—	ஒருபடி மாற்றம்

M

Matrix	—	அணி
,, augmented	—	விளிம்பு கூட்டிய அணி
,, adjoint	—	சேர்ப்பு அணி, துணை அணி
,, banded	—	கட்டப்பட்ட அணி
,, canonical form of	·	அணியின் நியமன வடிவம்
,, conjugate of	—	இணை அணி
,, determinant of	—	ஓர் அணியின் அணிக்கோவை
,, diagonal	—	சமமூலை வரையணி
,, element of	—	அணி மூலகம்
,, idempotent	—	சுய அடுக்கு அணி
,, inverse	—	நேரெதிர் அணி
,, involutory	—	தன்னெதிர் அணி
,, nilpotent	—	பூச்சிய அடுக்கு அணி
,, non-singular	—	பூச்சிய இயல் கோவை அணி
,, null	—	முற்றும் பூச்சிய அணி
,, order of	—	அணித்தரம்
,, orthogonal	—	செங்குத்தணி
,, regular	—	ஒழுங்கணி
,, rank of	—	அணி அளவை
,, row	—	நிரை அணி
,, scalar	—	மூலை வரையணி
,, skew symmetric	—	எதிர்ச் சீர்அணி
,, singular	—	சிறப்பு அணி
,, symmetric	—	சமச்சீர் அணி
,, trace of	—	அணியின் பிரதி
,, transpose	—	நிரல்நிரை மாற்றுஅணி, திருப்புஅணி
,, reciprocal	—	நேரெதிர் அணி
,, unit (identity)	—	அலகு அணி
,, unitary	—	சிக்கல் செங்குத்தணி
,, zero (Null)	—	பூச்சிய அணி
Maximum	—	உச்ச, மீப்பெரு, பெருமம்

Method – synthetic — தொகுப்பு வழி

,, Horner's — ஹார்னர் முறை

Method of trail ard error — பட்டறி முறை

Method of d.ff.rence — வேற்றுமை முறை

Minor of a determinant — ஓர் அணிக்கோவையின் பகுதி, சிற்றணிக்கோவை

N

Negative — குறை, எதிர்

Negative definite form — நிச்சயக் குறைக்கோவை

Negative semi-definite form — எதிர்க்கோவை

Non-homogeneous — ஓரினமில்லாத, ஒருபடியில்லாத

Non-linear — ஏக பரிமாணமில்லாத

Non-trivial — திரணமல்லாத, அற்பமல்லாத

Normal - செங்குத்து

Null vector — பூச்சிய திசையி, பூச்சிய வெக்டர்

Notation — எண் குறியீடு

Numerator — தொகுதி, தொகுதியெண்

Numerical differentiation — எண்சார் வகைக்கெழு காணல்

Numerical integration — எண்சார் தொகை காணல்

O

Operation — செய்கை

Operator — செயலி

Order — வரிசை, ஒழுங்கு

Order – ascending — ஏறுவரிசை

Order – descending — இறங்கு வரிசை

Ordinate — நிலைத்தூரம்

Origin — ஆதி

Orthegonal matrix — செங்குத்தணி

P

Part — பகுதி

Particular integral — சிறப்புத்தீர்வு

Period — காலம், காலவட்டம்

Periodic — காலவட்ட ஒழுங்குடைய

Periodic function — திரும்பு சார்பு, மடங்கி வரும் சார்பு

Point, turning — திரும்பற் புள்ளி

Positive — நேர், மிகை
Positive definite form — நிச்சய நேர்க்கோவை
Post multiplication — பின்பெருக்கல்
Positive semi definite form — நேர்க்கோவை
Power — அடுக்கு
Pre-multiplication — முன்பெருக்கல்
Primitive, complete — முழுமூலம்
Principal — தலையாய, முதல்
Principal value — தலையாய மதிப்பு
Process — செய்கை, முறை
Proof — நிறுவல், நிரூபணம்
Proportion — நேர் விகிதச்சமம்

Q

Quadratic equation — இருபடிச் சமன்பாடு
Quadratic forms — இருபடிச் சமச்சீர்க்கோவைகள்
Quadrature — பரப்புகாண்முறை

R

Rational integral function — விகிதமுறு முழுவெண்சார்பு
Real — மெய்யான
Recurring — மடங்குகின்ற
Reduce — ஒடுக்குதல்
Reverse — முன்பின்னாக்குதல், புரட்டுதல்
Root — தீர்வு (சமன்பாடு)
Root cube — கண மூலம் (முப்படி மூலம்)
Root imaginary — கற்பனைத் தீர்வு
Root real — மெய்த்தீர்வு
Rule — விதி

S

Scalar — திசையிலி, எண்ணி
Series — தொடர்
Series alternating — ஆடற்றொடர்
Series convergent — ஒருங்கு தொடர், எல்லையுள்ள தொடர்
Similar — வடிவொத்த
Singular solution — சிறப்புத் தீர்வு
Solve — தீர்த்தல்
Subscript — கீழ்க்குறி

Substitute	— பிரதியிடுதல்
Successive	— தொடர்ந்து, அடுத்தடுத்த
Summation by parts	— பகுதி பகுதியாகக் கூட்டல்
Summation of series	— தொடர் கூட்டல்
Symbol	— குறியீடு
Symmetric matrix	— சமச்சீர் அணி
Synthesis	— தொகுப்பு
System (Method)	— முறை, திட்டம், ஒழுங்கு

T

Term	— உறுப்பு
Theory	— கொள்கை, அறிமுறை
Transcedental curve	— அதி இயல் வளைவு
Trancedental function	— அதீத சார்பு
Transformation	— உருவமாற்றம், நிலைமாற்றம்
Trapezoidal	— சரிவகம் சார்ந்த
Trapezoidal rule	— சரிவக விதி (Calculus)
Truncation error	— துண்டித்தலின் பிழை

U

Units	— அலகுகள்
Unit matrix	— அணி அலகு
Unit vector	— அலகு வெக்டர்
Unity	— ஒன்று, ஒருமை

V

Value	— மதிப்பு, பெறுமானம்
Variable	— மாறி
Vector	— வெக்டர், திசையி

W

Width of an interval	— இடைவெளித் தூரம்

Z

	— பூச்சியம்